НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Історія математики в культурній спадщині Європи

Том I: Давній світ, математика корінних народів Америки

Наталія Іванова

Київ
2026

УДК 51(091), 51(092)

Затверджено до друку

Вченою радою Інституту математики НАН України

(протокол № 16 від 16 грудня 2025 р.)

Історія математики в культурній спадщині Європи Том I: Давній світ, математика корінних народів Америки. Київ: Інститут математики НАН України, 2026. 164 с.

Книга присвячена дослідженню розвитку математичного мислення в найдавніші періоди історії людства. Розглянуто витоки лічби й вимірювання в доісторичну добу, розвиток прикладної математики в цивілізаціях Єгипту та Месопотамії, а також становлення теоретичної математики в античній Греції. В окремому розділі досліджено математичні уявлення корінних народів Америки, які є прикладом незалежного й оригінального розвитку математичних ідей поза європейською традицією. Том поєднує культурно-історичний підхід із аналізом ключових математичних понять і завершується добіркою тем для студентських дослідницьких проєктів. Книга адресована дослідникам історії науки й математики, викладачам і студентам відповідних спеціальностей, а також широкому колу читачів, зацікавлених історією математики та європейської культури.

Рецензенти:

Ірина ЄГОРЧЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, Інститут математики НАН України

Ярослав ПРИТУЛА, канд. фіз.-мат. наук, Львівський національний університет імені Івана Франка

DOI https://doi.org/10.3842/imath.2026.book01.1

ISBN 978-617-14-0506-6 (загальний, електронне видання)

ISBN 978-617-14-0507-3 (Т. 1, електронне видання)

© Наталія Іванова

ЗМІСТ

Вступ 5
Подяки 7
Приблизний календарний план 8
Початок 11
Математика Давнього Єгипту 19
  Математика в давньоєгипетській міфології 20
  Джерела 21
  Нумерація та лічба 24
  Геометрія у Давньому Єгипті 26
  Підсумкові коментарі 28
Месопотамія 29
  Міфи і легенди 31
  Трохи про клинопис 31
  Нумерація, системи числення та арифметика 33
  Геометрія 35
  Алгебра 38
  Астрономія 40
  Підсумкові коментарі 42
Давня Греція 45
  Короткий огляд 47
  Математика в міфах Давньої Греції 49
  Грецька нумерація 51
  Математика архаїчного періоду 51
  Фалес Мілетський і іонійська школа 53
  Піфагор і його школа 58
  Зенон Елейський 69
  Гіппократ з Хіоса 72
  Демокріт і Протагор 74
    Демокріт у картинах художників XIV–XVIII століть 76
  Платон 79
  Евдокс Кнідський 85
  Теєтет Афінський 87
  Нерозв’язні задачі 88

Діонострат 89
Менехм 89
Архіт Тарентський 90
Аристотель 92
Поштові марки, присвячені Аристотелю 95
Автолік з Пітани 97
Аристей Старший 98
Евклід 99
«Начала» Евкліда 101
Арістарх Самоський 104
Архімед 106
Ератосфен Киренський 116
Аполлоній Перзький 120
Нікомед 121
Діокл 122
Зенодор 123
Гіпсикл Александрійський 125
Менелай Александрійський 127
Герон Александрійський 128
Клавдій Птолемей 130
Діофант Александрійський 133
Папп Александрійський 135
Захід грецької математики 139
Значення грецької математики 142
Математика корінних народів Америки. 144
Нумерація і лічба 146
Арифметика 148
Система мір 150
Геометрія 152
Елементи теорії ймовірностей 155
Підсумкові коментарі 156
Перелік проектів 157
Використані джерела 160

Вступ

Історія математики — це не просто розповідь про числа, формули чи великі імена минулого. Це спосіб осмислити, як людство формувало свою картину світу, як виникали математичні ідеї у відповідь на конкретні потреби: облік, будівництво, астрономія, торгівля, пошук порядку у світі. Цей предмет сприяє глибшому розумінню самої математики, її логіки, розвитку та ролі в культурі.

На жаль, українською мовою досі майже відсутні систематичні курси з історії математики. Тому кожна спроба створити такий курс — подія важлива. Це не лише збагачує україномовний науковий простір, але й допомагає зробити математику ближчою, зрозумілішою, людянішою.

Запропонований курс складається з трьох томів.

У першому томі йдеться про найдавніші етапи математичної думки: доісторичний період, математичні знання Єгипту, Месопотамії та античної Греції. Для ширшого культурного контексту також включено огляд математики корінних народів Америки. Хоча ця традиція напряму не вплинула на розвиток європейської науки, вона є вражаючим прикладом незалежного виникнення математичних ідей, що засвідчує універсальність математичного мислення. У кінці першого тому подано перелік можливих студентських проектів для самостійного вивчення.

Другий том присвячено математиці Китаю, Індії та країн ісламського світу.

Третій том показує розвиток математичної думки в Європі Середньовіччя та Відродження. Завершується він XVII століттям — добою, яку часто називають «золотим віком» математики. Усе, що стосується пізнішої історії, планується винести в окрему майбутню книгу.

Отже, структура нашого курсу відображає не лише хронологію, але й характер розвитку математики в різні епохи. Там, де історія науки — це насамперед історія задач і шляхів їх розв’язання, у центрі уваги опиняються окремі видатні постаті. Натомість у ті періоди, коли наука набуває внутрішньої системності, стає можливим — і навіть необхідним — розглядати її за галузевим принципом: як розвиток ідей, методів і напрямів.

Однією з важливих цілей курсу було показати, як змінювалася сама логіка математичного прогресу — від практичного знання, що передавалося в межах професійних і релігійних традицій, до теоретичної науки з чіткою структурою та власними методами. В античності на перший план виходять особистості — філософи й учені, які сприймали математику як частину загальної картини світу. У середньовіччі та добу Відродження — окремі винахідливі уми, що допомогли зберегти скарб античної думки, знаходили нові способи розв’язання вже відомих задач або ставили нові задачі. А починаючи з XVII століття, математика набуває рис організованої системи, де важлива не лише особистість автора, а й саме рух ідей, їхні внутрішні зв’язки та еволюція.

Саме тому у викладі чергуються біографічний і концептуальний підходи: одні розділи зосереджені на людях та їхніх долях, інші — на математичних ідеях, що визначили хід

розвитку науки. Такий гнучкий формат дозволяє показати історію математики в її справжній складності й багатогранності, не зводячи її ні до простої послідовності відкриттів, ні до галереї портретів.

Усі ілюстрації, використані в курсі, взяті з відкритих джерел. Перелік використаної літератури подано в кінці кожного тому.

Особливу увагу в ілюстративному матеріалі приділено поштовим маркам, присвяченим математиці. Завдяки цьому курс може бути цікавий також філателістам або тим, хто хоче поглянути на історію математики під новим, несподіваним кутом.

Дякуємо всім, хто зацікавився цією темою, і щиро бажаємо натхнення та успіхів у вивченні математики й історії математичної думки.

Подяки

Ця книга — результат багатьох років роздумів, досліджень і написання. Проте вона не могла б з’явитися без тієї підтримки, яку я відчувала весь цей час з боку своїх близьких. Щиро дякую своїй родині за терпіння, розуміння та доброзичливу увагу до кожного етапу цієї роботи. Їхній щирий інтерес до філателії не лише надихнув мене на збирання ілюстративного матеріалу, а й відкрив новий кут зору на історію математики — через марки, які розповідають власні історії.

Особливо вдячна своєму чоловікові за його глибокі й систематичні знання, особливо в галузі алгебри, якими він щедро зі мною ділився. Завдяки цим розмовам мені вдалося побачити тонкі зв’язки між математичними поняттями та глибше зрозуміти логіку їх історичного розвитку.

Мій син став моїм неочікуваним співавтором у розумінні історичного контексту. Його природна допитливість і щире захоплення темою допомогли мені сформулювати багато ідей, що лягли в основу цієї книги. Без нього цей текст, можливо, так і не було б написано.

Я щиро вдячна Олександрові Савелійовичу Штерну та Анатолію Глібовичу Нікітіну за цінні зауваження, критичне читання і захопливі обговорення, які неодноразово надихали мене поглиблювати матеріал.

Окрема подяка Бібліотеці Університету Кіпра, яка зібрала надзвичайну колекцію джерел з історії математики та культури. Доступ до цих матеріалів суттєво полегшив мою роботу та зробив її змістовнішою.

Сподіваюся, що ця книга стане для читача не лише пізнавальним джерелом, а й запрошенням до роздумів про те, як математика — одна з найдавніших і найвпливовіших форм людського мислення — формувала і формує наше уявлення про світ.

Приблизний календарний план

Цей розділ пропонує календарний план курсу «Історія математики в контексті європейської культури», який допомагає крок за кроком прослідкувати розвиток математичних ідей у тісному зв'язку з культурою та історією Європи.

Зміст цієї книги розроблено так, щоб його можна було використовувати й як навчальний посібник для курсу лекцій: від ранніх систем обліку часу до сучасних математичних концепцій, від зародження чисел і форм до інтеграції математичних ідей у мистецтво, науку та суспільство. Такий календарний підхід допомагає не лише організувати навчання, а й побачити, як математика включена в культурну спадщину Європи.

Тема курсу: Історія математики в контексті європейської культури

Тривалість: 12 тижнів

Формат: 1 пара (2 академічні години) щотижня

Тиждень	Тема лекції	Короткий зміст
1	Що таке історія математики? Вступ до курсу	Мета і методи історико-наукових досліджень; огляд періодизації; математика як культурний феномен.
2	Математика Стародавнього Сходу	Вавилон, Єгипет: практичні задачі, системи числення, перші алгоритми. Роль математики в адмініструванні та релігії.
3	Математика Стародавньої Греції: зародження теоретичної науки	Фалес, Піфагор, логічне мислення, доведення як культурна новація.
4	Класична грецька математика: Евклід, Архімед, Апполоній	«Начала» Евкліда, евклідова геометрія, поєднання практики й абстракції.
5	Олександрійська школа та пізньоантична традиція	Герон, Птолемей, Диофант. Астрономія та алгебра. Передача знань.
6	Індійська та ісламська математика: глобальний обмін ідей	Арифметика і алгебра в Індії (Арьябхата, Брахмагупта), переклади на арабську. Аль-Хорезмі, розвиток алгебри.
7	Середньовічна Європа: переривання й відновлення традиції	Передача знань через переклади з арабської, Фібоначчі, університети.

Тиждень	Тема лекції	Короткий зміст
8	**Коллоквіум** (усне/письмове опитування, обговорення)	Закріплення матеріалу. Можливе обговорення есе, відповідей на відкриті питання.
9	Математика в добу Відродження: мистецтво, наука, техніка	Перспектива в живопису, Вітрувій, Леонардо, Рафаель. Початки символічної алгебри.
10	Наукова революція XVII століття	Декарт, Ферма, Ньютон і Лейбніц: координати, аналітична геометрія, початки аналізу.
11	XVIII–XIX століття: математика та формування модерної науки	Класична механіка, математика в освіті, Лаплас, Гаусс, розвиток структурних понять.
12	XX століття і сучасність: математика і культура	Формалізм, кризи основ, прикладна математика, кібернетика. Європейська спадщина у світовому контексті.

Календарний план курсу (2 пари на тиждень = 4 години на тиждень)

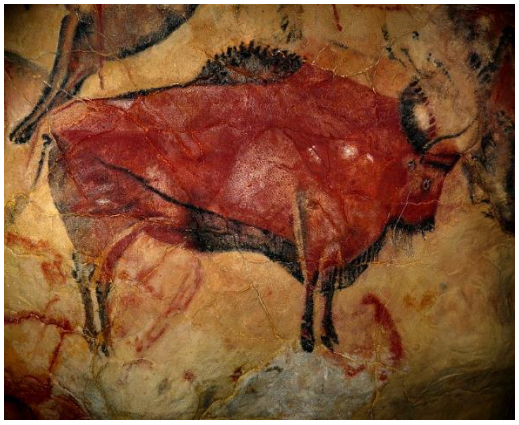
Тиждень	1-а пара	2-а пара
1	Вступ до курсу: Що таке історія математики? Мета і методи досліджень, поняття історії математики як культури	Математика Стародавнього Сходу: Вавилонські методи, системи числення, роль математики в адміністрації та релігії
2	Математика Стародавнього Єгипту: геометрія, практичні задачі, папіруси	Зародження грецької математики: Фалес, Піфагор, початок логіки і доведень
3	Евклід і його «Начала»: структура і значення, основи евклідової геометрії	Архімед: методи і відкриття; Апполоній та конічні перетини
4	Олександрійська школа: Герон Александрійський, Птолемей і астрономічні моделі	Диофант і алгебра: ранні алгебраїчні методи і вплив на пізніші науки
5	Індійська математика: Арьябхата, десяткова система, концепція нуля	Ісламська математика: Аль-Хорезмі, розвиток алгебри, переклади грецьких і індійських текстів

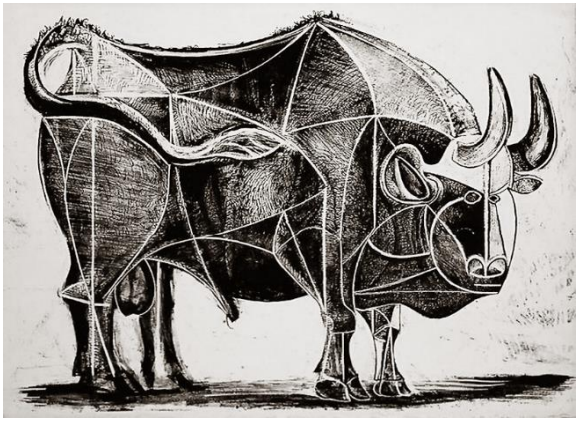
Тиждень	1-а пара	2-а пара
6	Середньовічна Європа: переклади, монастирі, роль Церкви у збереженні знань	Леонардо Фібоначчі і «Книга абака»: поширення індійських чисел у Європі
7	Ренесанс і математика в мистецтві: перспектива, Вітрувій, Леонардо да Вінчі	Початки символічної алгебри: розвиток символіки і методів обчислення
8	**Коллоквіум:** огляд матеріалу, дискусія, відповіді на питання	**Коллоквіум:** підсумкове усне/письмове оцінювання, обговорення
9	XVII століття: Декарт і Ферма, початки аналітичної геометрії	Поява математичного аналізу: основи, проблематика, підготовка до Ньютона і Лейбніца
10	Ньютон: диференціальне і інтегральне числення, наукова революція	Лейбніц: відмінності і подібності з Ньютоном, вплив на математику і науку
11	XVIII століття: Лаплас, Гаусс, класична механіка і розвиток математики	Формування університетської освіти і академій, математика як наука і професія
12	XIX століття: розвиток алгебри і геометрії, перші абстрактні структури	XX століття і сучасність: формалізм, кризи основ, комп'ютерна ера, роль європейської традиції

Примітки

- **Формат викладання**: лекції з візуальним супроводом (слайди, зображення), короткі інтерактивні обговорення.
- **Коллоквіум (8 тиждень)**: рекомендовано вільну форму — есе, міні-тести, обговорення.
- **Оцінювання**: коллоквіум + проект + підсумковий екзамен.
- **Можливі додаткові теми** (за інтересом аудиторії): математика в архітектурі, музичні структури, філософські підходи до математики.

Початок





Зображення з печери Альтаміра, приблизно 18 000 років тому, та «Бик» Пікассо, 1958 року, написаний під враженням від наскального живопису з Альтаміри

(фото з сайту https://museoaltamira.com/)

Коли виникла математика?

Це, мабуть, найпоширеніше запитання серед школярів, які вперше слухають лекцію з історії математики. І відповісти на нього не так просто. Найближча до правди відповідь звучала б приблизно так: «Математика була завжди».

Перші елементарні математичні уявлення з'явилися разом із самою людиною — а можливо, навіть раніше. Багато сучасних біологів (а також майже всі власники домашніх тварин) вважають, що тварини мають хоча б елементарне розуміння кількості.

Так, англійський біолог Джон Лаббок згадує спостереження натураліста Лероя[Conant, 1896]: *«Лерой <...> згадує випадок, коли чоловік хотів підстрелити ворону. Щоб обдурити цю обережну й пильну птицю, вирішили надіслати до її гнізда двох людей: один мав пройти повз, а інший — залишитися. Але ворона порахувала їх і не наближалася. Наступного дня пішли вже троє, але вона знову зрозуміла, що тільки двоє пішли геть. Зрештою довелося відправити п'ятьох чи шістьох, щоби збити її з рахунку. Ворона, думаючи, що всі пройшли повз, одразу повернулася до гнізда З цього він робить висновок, що ворона здатна рахувати до чотирьох. Ліхтенберг пише про солов'я, який умів рахувати до трьох. Щодня йому давали трьох черв'яків, по одному за раз. З'ївши одного, соловей повертався за наступним, а після третього знав, що обід закінчено. Є одна кумедна й водночас промовиста деталь у «Розповідях дослідника тропічної Південної Африки» містера Гальтона. Після опису слабких математичних здібностей африканського племені Демара, він зазначає: «Якось, спостерігаючи, як один африканець безнадійно намагався щось порахувати, я помітив поруч Дайну — мою спанієльку, яка також виглядала розгубленою. Біля неї була купка з півдюжини новонароджених цуценят, що постійно розповзалися. Вона дуже непокоїлась і намагалася з'ясувати, чи всі вони на місці, чи когось бракує. Вона пильно оглядала їх, але нічого не могла зрозуміти. Очевидно, вона мала якесь смутне уявлення про лічбу, але ця кількість була надто великою для її розуму. Якщо порівняти їх обох — людину й собаку — то людина тут не у виграшному становищі...»»*

Таким чином, є підстави вважати, що здатність до елементарного рахунку — відрізняти, наприклад, три від чотирьох — притаманна не лише людям, а й деяким тваринам. А отже, передумови для виникнення математики могли виникати ще до появи Homo sapiens як виду.



Фігура мамонта та голова печерного лева з геометричними візерунками, приблизно 40 000 років тому, знайдені в печері Фогельхерд на Швабському Юрі, Німеччина, Фото: Alison Fisk

Давні люди вміли полювати, збирати рослини, готувати їжу, творити — а все це неможливо без розвитку елементарних математичних уявлень. Адже не маючи поняття про числа, неможливо «справедливо» поділити здобич між усіма членами племені. Щоб розуміти, наскільки далеко мисливці можуть відійти від печери, потрібно мати уявлення про відстань; щоб оцінити безпечну дистанцію для кидка списа — потрібно орієнтуватися в довжині тощо.

Тому можна вважати, що історія математики бере свій початок разом із виникненням людської культури — і з тих давніх часів вони нерозривно пов’язані.



Фігура птаха зі складним геометричним візерунком-меандром, приблизно 15 000 років тому, знайдена на території України

Протягом сотень і тисяч років люди поступово накопичували математичні знання, уміння та навички. Перший відомий нам якісний стрибок у цьому процесі відбувся в епоху нижнього палеоліту, коли люди почали відокремлювати абстрактне поняття числа від самих предметів, які вони лічили. Ймовірно, це сталося тоді, коли люди помітили

взаємно однозначну відповідність між різними множинами: «У мене є дружина, донька і син — покладу перед кожним з них по рибині. Ще одна рибина залишиться для мене».



Але що робити, якщо дружина, син, донька (і інші члени племені) не сидять поруч на березі? У який момент припинити риболовлю, щоби всіх нагодувати, але водночас не витрачати сили даремно? Сьогодні відповідь для нас очевидна: потрібно порахувати членів племені і ловити рибу доти, доки її не стане на всіх. Для людей тієї доби, ще не знайомих із поняттям числа, величезним проривом стала сама ідея, що людей (і взагалі будь-які предмети) можна порахувати.

Як саме здійснювався той перший рахунок, можна лише здогадуватися. Можливо, перед виходом із печери мисливець уважно дивився на своїх товаришів і показував на кожного з них різними пальцями, а потім просто запам'ятовував, на якому пальці зупинився. Або ж робив зарубки на дереві чи кістці, кожна з яких відповідала певній людині. У деяких культурах замість зарубок використовували вузлики на мотузках — спочатку з жил тварин, а згодом з рослинного волокна.

У племенах Нової Гвінеї й досі можна зустріти систему лічби, що базується на суглобах обох рук та частинах обличчя. Тому замість того, щоб загинати пальці, як це робимо ми, вони торкаються відповідних частин тіла, рахуючи послідовно.[1]



Історію накопичення математичних знань у часи палеоліту прослідкувати надзвичайно складно, адже матеріальних свідчень культури збереглося вкрай мало. Найдавнішим із них, ймовірно, є геометричний абстрактний орнамент, нанесений на камінь із печери Бломбос на південному узбережжі Південної Африки. Вважається, що цей артефакт належав кроманьйонцям і був створений приблизно 70 000 років тому.



Кістка Лебомбо (згори) та кістка Ішанго (знизу)

Одним із найдавніших математичних артефактів світу вважають кістку Лебомбо — кістяний інструмент, вирізаний із великогомілкової кістки павіана, з позначками на поверхні. Його знайшли в печері Бордер у горах Лебомбо, що тягнуться між Південною Африкою та Есватіні. Різні форми насічок свідчать про те, що для їхнього виготовлення

[1] Базовим числом у такій системі буде не звичне для нас число 10, а 27 або 23.

використовували різні ріжучі інструменти, і, як вважає першовідкривач кістки Пітер Бомонт, вони могли створюватися під час різних релігійних ритуалів.

За даними радіовуглецевого аналізу, кістці приблизно 42–43 тисячі років. Звісно, археологи вже знайшли чимало кісток із насічками, що сягають 80 тисяч років, але досі незрозуміло, чи мали ті зарубки чисто декоративне значення, чи виконували якусь практичну функцію.

Можливо, кістка Лебомбо була своєрідною «рахівницею». На ній налічується двадцять дев'ять насічок, і деякі дослідники припускають, що її могли використовувати для відліку фаз Місяця. У такому випадку перші математики могли бути африканські жінки, адже для відстеження менструальних циклів потрібен місячний календар. Однак один кінець кістки зламаний, тож залишається нез'ясованим, чи було на ній дійсно 29 насічок.



Кістку Лебомбо часто плутають із кісткою Ішанго, якій близько 22 000 років. У 1960 році бельгійський геолог і мандрівник Жан де Хайнцелін де Брокур (1920–1998) поблизу витоків Нілу на території сучасної Демократичної Республіки Конго натрапив на кістяний інструмент із великогомілкової кістки бабуїна з вирізаними на ній позначками. Спершу припускали, що це просто рахівниця, якою користувалися люди кам'яного віку.

Але уважне вивчення показало: творці кістки знали про числа значно більше, ніж можна було очікувати від палеолітичних людей. Один із рядів починається з трьох борозенок, які потім подвоюються. Наступний ряд стартує з чотирьох насічок і закінчується вісьмома, а після десяти йдуть п'ять. Це може свідчити про розуміння простих операцій подвоєння і ділення навпіл.

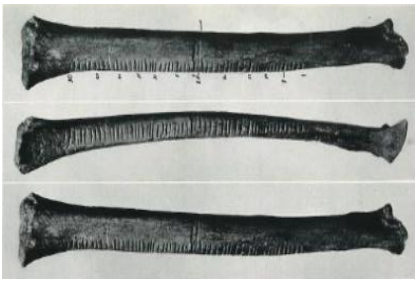


У другому ряду насічки згруповані так, щоб утворювати візерунки з 9, 11, 13, 17, 19 і 21 засічки. Третій ряд містить усі прості числа між 10 і 20, а сума чисел у кожному з трьох рядів дорівнює або 60, або 48 — обидва числа кратні 12.

Проте дослідник Пітер Рудман [Rutman, 2007] зауважує, що до поняття «простого числа» люди могли дійти лише після того, як усвідомили операцію ділення, що, за його оцінкою, сталося приблизно 10 000 р. до н. е. Прості числа, ймовірно, почали розуміти лише близько 500 р. до н. е.

У Європі найдавнішою рахівницею вважають променеву кістку молодого вовка довжиною близько 17 см із 55 зарубками, віком приблизно 30 000 років. Її у 1937 році під час розкопок у Дольчі-Вестоніце (Моравія, сучасна Чехія) знайшов Карел Абсолон[2]. Можливо, ця кістка належала мисливцеві, який відзначав кількість здобичі, а можливо

[2] Вестоніцька кістка була знайдена серед артефактів оріньякської культури, яку традиційно пов'язують із кроманьйонцями. Проте кроманьйонець — найраніший «сучасний чоловік» — у той час усе ще мешкав у південній Європі та Африці. Тож чи була ця вовча кістка артефактом сучасної людини, чи все ж неандертальця? Невідомо...



— комусь іншому, хто намагався порахувати, скільки місячних циклів минуло відтоді, як він знайшов собі пару.

Як би там не було, цей давній чоловік однозначно займався примітивним рахунком. І хоча сьогодні можна лише здогадуватися про точну мету таких позначок, відповіді на подібні питання стануть можливими лише тоді, коли археологи знайдуть і детально дослідять набагато більше подібних артефактів.

З розвитком людства в неолітичний період полювання та збиральництво поступово відходили на другий план, поступаючись місцем землеробству, а кочове життя змінювалося осілим. З'явилася потреба будувати міцніші житла, розвивалися ремесла та торгівля між поселеннями. Людська мова ставала складнішою, виникали нові слова, діалекти й мови.

Спершу угоди були простими і більше нагадували обмін, ніж торгівлю. Подібні практики можна побачити й сьогодні серед невеликих народів Амазонії чи Австралії. Так, Дж. Морган [Morgan, 1952] описує, як два австралійські племена обмінювали вугрів на коріння: «Двоє чоловіків з кожного боку приносили вугрів і коріння на довгих шматках кори. Потім переносили їх на голові з одного боку на інший, поки вся кількість не була обміняна.»

Разом із потребою у більш складному спілкуванні під час обміну з'явилася необхідність у нових математичних поняттях. Люди почали усвідомлювати не лише рівність (наприклад, у мене стільки риб, скільки пальців на двох руках, і ще одна), а й поняття «більше» та «менше». Для рахунку використовували різні підручні засоби — пальці, камінці, мушлі чи палички. Поступово число перестало залежати від конкретних предметів, і виникли власні назви чисел — спершу для малих, а потім для дедалі більших. Так зародилося й розвивалося поняття натурального ряду чисел.

Цей шлях, характерний майже для всіх культур, у різних регіонах проходив із різною швидкістю. Проте й сьогодні існують народи, у мовах яких поняття числа взагалі відсутнє. Наприклад, на берегах річки Маісі (притока Амазонки) живе народ мисливців-збирачів піраханів[3]. У їхній мові немає числівників, немає уявлень про минуле чи майбутнє, як і календаря. Час для них обмежується лише зміною сезонів — від дощів до посухи. Єдині кількісні категорії — «трохи» і «багато», і навіть вони не мають чітких меж.

Починаючи з 1970-х років культура піраханів активно вивчається. У серії експериментів Пітер Гордон просив піраханів показувати стільки ж предметів, скільки він сам виставляв. Використовували батарейки AA, горіхи, намальовані лінії, цукерки та коробки з різною кількістю рибок. Предмети Гордон викладав у ряд, спонтанно або групами; іноді ховав їх через секунду після показу, а іноді кидав у непрозору банку. Гордон зробив висновок:

[3] Числівників немає також у мовах болівійських племен Чикіта та Такана [Conant, 1986]. Проте мова (і культура) племені піраханів досліджена значно краще, оскільки вважається, що цей язик, позбавлений можливості рекурсії (утворення складнопідрядних і довгих речень), суперечить загальноприйнятим законам лінгвістики.

пірахан важко оперують кількістю більше трьох предметів. Хоча вони рахують на пальцях, кількість загнутих пальців не завжди відповідає числу предметів.

Пізніше група вчених повторила експеримент у контрольованих умовах. Котушки ниток викладалися на рівну поверхню числом до десяти, щоб уникнути випадкового пересування. Пірахан мали виставити таку ж кількість кульок. Коли котушки розташовувалися перед ними в ряд, вони майже не помилялися — кожній котушці відповідала одна кулька. Але якщо котушки після показу закривали екраном або потрібно було викладати власну лінію перпендикулярно ряду експериментатора, помилок було більше половини. Лише 12 із 56 разів пірахан вгадали кількість предметів, кинутих у непрозору банку.

Було підтверджено, що у мові пірахан немає числівників. Вони використовують відносні терміни h'oi, ho'i і ba'agiso, де кожен наступний означає більшу кількість, ніж попередній, але число предметів, що відокремлює одне поняття від іншого, не фіксоване. Пірахан обирає термін залежно від ситуації, і думка інших може не збігатися з його власною. Один предмет завжди ho'i, проте цим словом можуть позначати й інші кількості.

Дослідники дійшли висновку: пірахан розуміють кількісну різницю навіть у один предмет, але відсутність абстрактних термінів для числа ускладнює перенесення інформації про кількість у просторі та часі. Таким чином, поняття числа — це своєрідний винахід, який розширює когнітивні можливості людини, подібно до алфавіту, але не є обов'язковою рисою людської мови [Gordon, 2004].

Паралельно з розвитком числа у людській культурі формувалося й відчуття форми. Коли люди виготовляли й розписували глиняні вироби, плели циновки та кошики, займалися ткацтвом та іншими ремеслами, вони поступово виробляли уявлення про співвідношення у просторі та на площині, про симетрію, рівність і подібність фігур. Саме в цих практиках закристалізувалися сучасні геометричні форми. Орнаменти декоративно-прикладного мистецтва поступово ставали більш витонченими та складними, відображаючи водночас прагнення людини до порядку, краси й гармонії.



Паралельно з розвитком числа у людській культурі формувалося й відчуття форми. Коли люди виготовляли та розписували глиняні вироби, плели циновки та кошики, займалися ткацтвом та іншими ремеслами, вони поступово виробляли уявлення про співвідношення у просторі та на площині, про симетрію, рівність і подібність фігур. Саме в цих практиках закристалізувалися сучасні геометричні форми. Орнаменти декоративно-прикладного мистецтва ставали дедалі витонченішими та складнішими, відображаючи прагнення людини до порядку, краси й гармонії.

Це легко простежити на прикладах догеометричного та геометричного мистецтва Кіпру, у кераміці мінойського та ранньогрецького періодів, а пізніше — у візантійських і арабських мозаїках та східних килимах. У всіх цих зразках

мистецтва видно, як абстрактне мислення людини поступово переходить у форму, яка здатна бути одночасно красивою, гармонійною й математично точною.

Ймовірно, спершу геометричні орнаменти мали лише релігійне чи магічне значення. Та з розвитком мистецтва та науки їхня роль поступово змінилася — тепер вони стали предметом естетичного захоплення, вираженням краси та гармонії.

Але геометрія й числа — це ще не все. «Третім китом» доісторичної прематематики було усвідомлення часу. Люди почали спостерігати рух Сонця, Місяця та зірок, накопичувати базові знання про їхні цикли та створювати перші календарі.

Перші календарі виникли для того, щоб відстежувати циклічні зміни погоди. Так, приблизно 5000 років до н. е. у Набта-Плайя (територія сучасного Єгипту) напівкочові племена скотарів створили, ймовірно, перший річний «календарний круг». Початок року в ньому відзначався появою зірки Сіріус. Цей календар допомагав людям визначати, коли очікувати початок і кінець сезону дощів — знання, від якого залежало їхнє виживання та господарство.



Календар в Набта-Плайя (фото з сайту Вікіпедія)

Приблизно в той самий час на території сучасної Німеччини було створено так званий Ґозекський круг. Його головним орієнтиром стало зимове сонцестояння. Круг складається з чотирьох концентричних ровів діаметром 75 метрів і двох палисадних кілець із трьома воротами, спрямованими на південний схід, південний захід і північ.

Під час зимового сонцестояння спостерігачі з центру могли бачити, як Сонце сходить і заходить через відповідні ворота — південно-східні та південно-західні. Це дозволяло давнім людям відстежувати найкоротший день у році та орієнтуватися в часі.



Реконструйований Ґозекський круг зсередини (фото з сайту Вікіпедія)

Осколки кераміки, знайдені поблизу кола, свідчать, що його спорудили близько 4900 року до н. е. На кераміці помічено два види лінійних узорів, характерних для того часу, що вказує на високий рівень майстерності та мистецький смак творців цього древнього астрономічного монументу.

Ґозекський круг створили представники культури накільчастої кераміки. Більшість археологів погоджуються, що його використовували для астрономічних спостережень, зокрема для складання місячного календаря. У такому разі його можна вважати найдавнішою відомою в Європі сонячною обсерваторією епохи неоліту та бронзи.

Люди накопичували знання про рух Сонця, Місяця та зірок і почали використовувати їх як орієнтири під час плавань. Таким чином зародки астрономії допомогли розвинути базові уявлення про властивості сфери, кола та кути.



Небесний диск із Небри (унетіцька культура Центральної Європи) вважається найдавнішим відомим матеріальним зображенням космічних явищ у світі, приблизно XVII ст. до н. е.

(фото з сайту Вікіпедія)

Ранню історію математики можна лише приблизно відтворити, іноді — здогадуючись про деталі. Але з появою писемності та розробкою математичних символів постає вже чіткіша картина.

Найдавніші відомі тексти належать приблизно до другого тисячоліття до н. е. Це, насамперед, клинописні таблички Шумеру та Вавилону, єгипетські папіруси, а також менш міцні й тому гірше збережені письмові записи з Давнього Китаю та Давньої Індії.

Особливу роль у розвитку математики відіграв Давній Єгипет, чия наука справила величезний вплив на Давню Грецію — колиску європейської цивілізації. Греки навіть вірили, що наука зародилася саме в Єгипті. Так, у «Метафізиці» Аристотель писав: «… наука виникла в Єгипті; саме там жерці мали необхідний вільний час».

З ним погоджується й Геродот, але додає важливий нюанс: науку було зумовлено практичними потребами. Під час щорічного розливу Нілу розмивалися межі земельних ділянок, і їх потрібно було регулярно відновлювати, не змінюючи форму та розмір. «І це, на мою думку, було початком геометрії, яка звідти перейшла до Греції».

Так, можна уявити собі жерців і землеробів, які підраховують поля й вимірюють площі, спостерігають за розливом Нілу і вже тоді закладають основи науки, що згодом стане фундаментом для всієї європейської математики.

Математика Давнього Єгипту



Лоуренс Альма-Тадема, Давньоєгипетські шахісти, 1865 р.

Зв’язок давньоєгипетської математики з культурою цієї стародавньої цивілізації був глибоким і багатовимірним. Давні єгиптяни вірили, що світ влаштований згідно з божественним порядком, який можна пізнати й описати за допомогою математики та геометрії.

Наприклад, у храмах і пірамідах часто зустрічаються геометричні символи та пропорції, що символізують космічний порядок і духовні істини. При будівництві пірамід, храмів та інших архітектурних споруд використовувалися математичні принципи. Точні геометричні розрахунки дозволяли створювати споруди, вражаючі своєю пропорційною красою, які й сьогодні захоплюють величчю та гармонією форм.

Давні єгиптяни застосовували математику для вимірювання земель, розподілу врожаю та управління ресурсами. Зокрема, вони розробили систему зрошення, засновану на точних розрахунках об’єму води та її розподілу по полях.

Математичні та числові концепції часто інтегрувалися в релігійні обряди та ритуали. Наприклад, використання числа 4 (пов’язаного з чотирма сторонами світу) та числа 7 (пов’язаного з сімома планетами, видимими на небі) у ритуалах мало особливе значення.

У цілому, давньоєгипетська математика пронизувала різні сфери культури цієї цивілізації — від релігії й архітектури до повсякденного життя, освіти та громадських обрядів, формуючи тим самим не лише матеріальне, а й духовне життя давніх єгиптян.

Математика в давньоєгипетській міфології

Давньоєгипетська цивілізація була однією з перших, де математика відігравала важливу роль не лише в практичних сферах, таких як будівництво та облік, але й у релігійних уявленнях. Єгиптяни сприймали числові закономірності як відображення божественного порядку, що знаходило своє відображення в міфах та ритуалах.



У Давньому Єгипті богом-покровителем математики вважався Тот – бог мудрості, письма, рахунку, часу та вимірювань. Його зображували з головою ібіса або у вигляді павіана, а його культ був особливо поширений у місті Гермополь. Згідно з міфами, Тот винайшов писемність і систему числення, а також допомагав богам підтримувати космічний порядок. В одному з міфів Тот відіграв важливу роль у створенні 365-денного календаря. За легендою, богиня неба Нут не могла народити дітей протягом усіх 360 днів року, оскільки це заборонив бог сонця Ра. Тоді Тот, використавши свою мудрість і математичні розрахунки, грав у кості з Місяцем і виграв у нього додатковий час – п’ять днів, які стали новими днями року.



Одним із ключових понять давньоєгипетської міфології була Маат – богиня і водночас концепція істини, гармонії та космічного порядку. У Книзі мертвих описується сцена зважування серця померлого у залі суду Осіріса. Серце клали на одну чашу терезів, а на іншу – перо богині Маат. У цьому ритуалі використовувалася числова символіка: померлий мав виправдатися перед 42 суддями, що уособлювали 42 закони Маат. Число 42 могло бути пов’язане з адміністративним поділом Єгипту (номами), а також із математичними та юридичними концепціями порядку.

Іншим важливим числом було сім – воно часто зустрічалося в магічних текстах і ритуалах, символізуючи завершеність і захист. Наприклад, бог Ра подорожував підземним світом протягом 12 годин, що відображало циклічність і облік часу, заснований на математичних принципах.



Піраміди, окрім інженерного дива, несли в собі сакральну числову символіку. Хоч міфів, що прямо розповідають про будівництво пірамід, небагато, єгиптяни вірили, що самі боги передали людям знання з математики та геометрії. Пропорції пірамід відповідали числам, пов’язаним із міфологією: основа піраміди асоціювалася з чотирма сторонами світу, а висота – з підняттям душі до неба.

Таким чином, у давньоєгипетській міфології математика слугувала не лише інструментом пізнання, а й способом вираження священного порядку всесвіту. Числа були не просто кількісними показниками, а символами, що поєднували земне і божественне.

Джерела

Єгиптяни писали на папірусі, який погано зберігається навіть у посушливому кліматі Єгипту, тому наші знання про давньоєгипетську математику значно обмеженіші, ніж, наприклад, про математику Вавилону чи Греції. Імовірно, рівень її розвитку був вищим, ніж можна уявити, виходячи лише з наявних документів. Головними джерелами наших знань про єгипетську математику є:

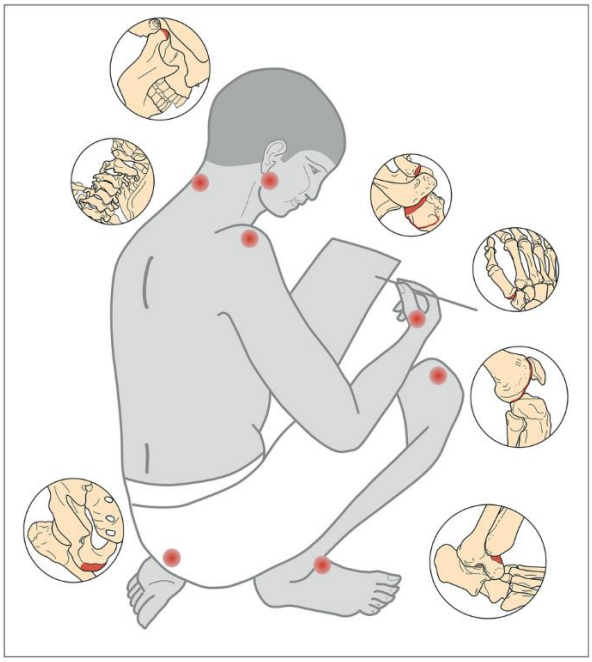
- Папірус Ахмеса, або папірус Райнда – найбільший збережений манускрипт розміром близько 30 см × 5,5 м, що містить 84 математичні задачі. Створений приблизно у 1650 р. до н. е. Його автор – писар Ахмес – вважається першим в історії математики, чиє ім'я дійшло до нас. У 1858 році цей сувій придбав на ринку Луксора шотландський юрист Александер Генрі Райнд (Ринд). Від 1864 року він зберігається у Британському музеї.
- Московський математичний папірус (25 задач), бл. 1850 р. до н. е., розмір 544 × 8 см.
- «Шкіряний сувій» (25 × 43 см), придбаний Александером Генрі Райндом у 1858 році. Разом із папірусом Ахмеса у 1864 році він потрапив до Британського музею, але аж до 1927 року не розгортался і не піддавався хімічній обробці.
- Папіруси з Лахуна (Кахуна), що містять низку фрагментів на математичні теми.
- Берлінський папірус, бл. 1300 р. до н. е.
- Каїрські дерев'яні таблички (таблички Ахміма).
- Папірус Рейснера, приблизно XIX ст. до н. е.



Фрагменти папіруса Райнда, Московського математичного папіруса, Берлинського папіруса та папіруса Рейснера

Більшість цих документів належать до однієї епохи. Задачі, які в них містяться, були вже доволі старими на момент складання папірусів, тому простежити точну хронологію розвитку математичних знань у Єгипті неможливо.

На час створення папіруса Ахмеса та Московського папіруса (епоха Середнього царства[4]) єгипетська культура вже перебувала на високому рівні. Носіями наукових знань були так звані писарі, які виконували обов'язки, близькі до сучасних учителів, перекладачів, переписувачів, лікарів, рахівників, державних службовців тощо. Писарі мали власну ієрархію: на нижчих щаблях вони працювали секретарями, а на верхніх обіймали високі державні посади. Сам фараон вважався «писарем божественної книги».



Ілюстрація із статті
[Brukner Havelková., Dulíková., Bejdová, Vacková., Velemínský., Bárta, 2024].

Попри те, що ця професія не передбачала важкої фізичної праці, давньоєгипетські писарі часто завдавали непоправної шкоди своєму здоров'ю. Чеські антропологи та єгиптологи[Brukner Havelková, Dulíková, Bejdová, Vacková, Velemínský, Bárta, 2024] з'ясували, що близько 90% писарів мали однакові дегенеративні зміни кісток і суглобів: ураження скронево-нижньощелепного суглоба, правої ключиці, верхньої частини правої плечової кістки (у місці з'єднання з плечем), першої п'ясткової кістки великого пальця правої руки, нижньої частини стегна (у ділянці колінного суглоба), а також усього хребта, особливо його верхнього відділу. Крім того, у писарів виявили вм'ятини на обох колінних чашечках і сплощення поверхні кістки в нижній частині правої щиколотки. Дослідники

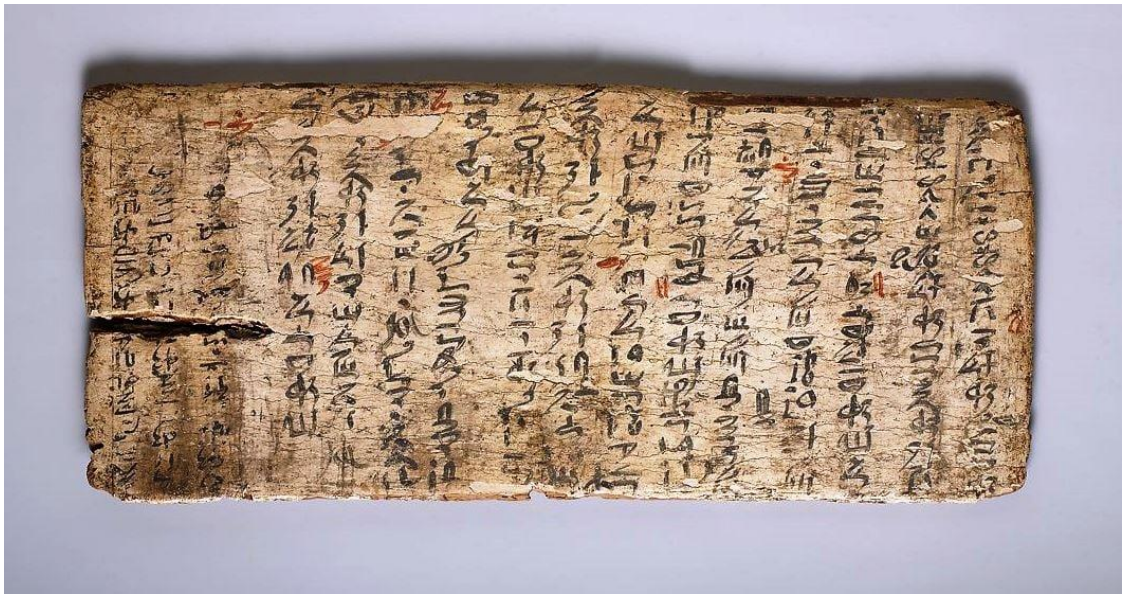
[4] Сучасні дослідники вважають, що об'єднання Єгипту в Раннє царство зі столицею у верхньоєгипетській Тіні відбулося близько 3000 р. до н. е. за фараона Менеса (Міни). Приблизно 2700 р. до н. е. виникає Давнє царство зі столицею в нижньоєгипетському Мемфісі. Близько 2000 р. до н. е. його змінює Середнє царство зі столицею у Фівах. Через двісті років після цього з аравійських степів у Єгипет вторглися гіксоси. Після їх вигнання починається епоха Нового царства. У 670 р. до н. е. Єгипет захопили ассирійці. У 655–525 рр. до н. е. він знову існував як незалежна держава, але згодом був завойований персами, а у 332 р. до н. е. – Александром Македонським. Після його смерті в Александрії утвердилося елліністичне царство Птолемеїв.

припустили, що такі зміни були наслідком надзвичайно суворих вимог до праці писарів, які регламентували не лише обов'язки й робочі години, а й єдині допустимі робочі пози.

Очевидно, що сколіоз, артрити та інші професійні хвороби людей, зайнятих розумовою працею, виникли задовго до XX століття – набагато раніше, ніж сьогодні можна уявити.

Писарів у Єгипті готували у спеціальних школах, які, ймовірно, існували ще з часів Середнього царства. Учні починали з найпростішого – вправлялися писати шматочками вапняку на глиняних черепках. Коли це вдавалося, переходили до письма на папірусі. Але писар мав бути не лише вправним у письмі: від нього вимагали ще й знань з математики, географії та інших наук.

Досить добре про це розповідає папірус Анастасі I (офіційно – папірус Британського музею 10247). Це сатиричний твір, створений для навчання майбутніх писарів. У ньому військовий писар Хорі звертається до свого колеги Аменемопа (ймовірно, вигаданого персонажа), кепкуючи з його безпорадності. Зазвичай цей папірус називають першим у світі відомим «підручником з географії». Але він показує й інше: для писаря математика була не менш важливою, ніж уміння писати чи гарно висловлюватися. У тексті є такий епізод: «Я хочу пояснити тобі, що означає твоє твердження: «Я – писар, що віддає накази війську». Тобі доручено викопати озеро. Ти приходиш до мене, питаєш про запаси для солдатів і кажеш: «Порахуй це». Ти залишаєш свою справу, а на мої плечі лягає завдання – навчити тебе, як її виконати. Я ставлю тебе у глухий кут, коли передаю наказ від твого володаря тобі – його царському писарю… мудрому писарю, поставленому на чолі цього війська. Треба зробити насип завдовжки 730 ліктів і завширшки 55 ліктів; він складається зі 120 окремих ящиків і вкритий перекладинами та очеретом. У верхній частині його висота становить 60 ліктів, у середині – 30 ліктів; нахил дорівнює двічі по 15 ліктів, а настил – 5 ліктів. І воєначальників запитують, скільки знадобиться цегли, і всіх писарів питають – ніхто не знає. Усі сподіваються на тебе й кажуть: «Ти – вправний писар, друже мій, порахуй це для нас швидше. Дивись, твоє ім'я славиться. Скільки ж потрібно для цього цегли?»».



Учнівська дошка для письма з правописними виправленнями, які зробив учитель. Єгипет, 12-та династія. 1981-1802 до н. е., Метрополітен-музей.

Подібні навчальні вправи для писарів містилися і в папірусі Ахмеса (Райнда), і в Московському папірусі. Саме на їхньому змісті, головним чином, ґрунтуються всі наші уявлення про давньоєгипетську математику.



Варто зазначити, що достовірних відомостей про математику Раннього та Давнього царств не зберіглося. Лише непрямі ознаки – написи й малюнки на небагатьох збережених стінах – дають підстави припускати, що вже в III тисячолітті до н. е. існували розвинене письмо з математичними символами й календар, у якому рік поділявся на 12 місяців по 30 днів, а наприкінці додавали ще п’ять додаткових днів. Єгипетські художники також мали уявлення про масштаб і для зменшення зображень користувалися квадратними сітками.

Нумерація та лічба

Папірус Райнда, що дає нам уявлення про математику Середнього царства, починається з єгипетської нумерації та техніки лічби. У єгиптян існували окремі знаки для 1, 10, 100, … 1 000 000.

число	значення	опис
	1	мірна палиця або риска
	10	п’ятка чи пута для стриножування корів
	100	петля мотузки для вимірювання полів
	1 000	квітка лотоса (або водяна лілея)
	10 000	палець
 или 	100 000	жаба або пуголовок
	1 000 000	людина з піднятими догори руками (здивована людина)

При записі числа ієрогліфи одиниць, десятків, сотень тощо повторювалися стільки разів, скільки цих одиниць містилося у відповідному розряді. Додавати такі числа було досить просто. Для множення єгиптяни користувалися поєднанням подвоєнь і додавань.

Наприклад, розгляньмо схему множення 12 на 12 із задачі 32 папіруса Райнда, переписавши її сучасними позначеннями:

1	12
2	24
4	48
8	96
Сума	**144**

(Тут множення на 4 і 8 разом дають множення на 12.)

Для пришвидшення рахунку іноді окремо виділяли множення на 10 і на 5. Так, у задачі 6 Лахунського папіруса множення 16 на 16 виконується за такою схемою:

1	16
10	160
5	80
Сумма	256

Ділення «в стовпчик» виконувалося як операція, обернена до множення. Так, у задачі 69 папіруса Райнда, де 1120 ділиться на 80, написано: «Множ (буквально: додавай, починаючи з 80), поки не отримаєш 1120».

Якщо поділити націло не виходило, єгиптяни переходили до роботи з дробами. Причому вони користувалися лише аліквотними дробами (сучасною мовою – дробами з чисельником 1) та дробами 2/3 і 3/4. Інші дроби записували як суму перелічених вище дробів, при цьому стежили, щоб усі дроби у сумі були різними.

Найвідомішою сьогодні задачею з папіруса Райнда є задача 79: «У семи будинках міститься по сім котів. Кожен кіт упіймав по сім мишей. Кожна миша з'їла по сім колосків зерна. Кожен колосок зерна дав би сім гекатів пшениці. Скільки всього тут перелічено?»[5]

З аналізу цієї задачі випливає, що єгиптянам була відома формула суми геометричної прогресії.

[5] Подібна задача міститься і в «Книзі абака» Фібоначчі (1202 рік).

Геометрія у Давньому Єгипті

Деякі задачі з згаданих папірусів були чисто геометричними. Аналізуючи їх, можна сказати, що єгиптяни вміли визначати площу прямокутника, трикутника та трапеції, причому користувалися тими ж методами, що й ми. Вражаюче точною була і їхня формула для визначення площі кола: площа кола діаметра d обчислювалася за формулою $(d - d/9)^2$, що давало для π значення $256/81 \approx 3{,}1605$.

Єгиптяни також вміли обчислювати об'єми таких тіл, як куби, паралелепіпеди та кругові циліндри. Об'єми рахували як добуток площі основи на висоту тіла. При цьому, як і більшість задач папіруса Ахмеса, задачі на об'єми були виключно прикладними, здебільшого для визначення об'єму різних посудин для зерна та зернових комор. Основна складність у цих задачах полягала у перекладі одних одиниць об'єму та сипучих тіл в інші.



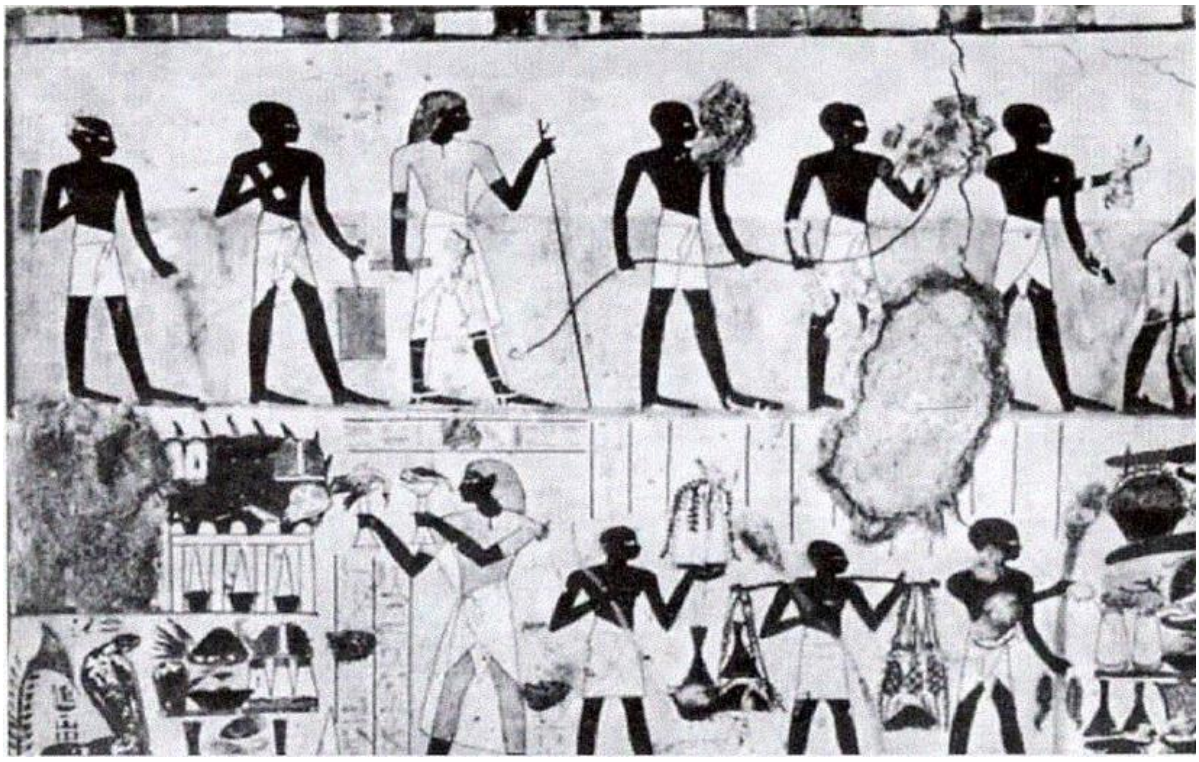
Обчислення об'єму зрізаної піраміди в Московському папірусі

Мабуть, найцікавіший результат єгипетської геометрії – формула об'єму зрізаної піраміди з квадратною основою $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, де a і b – довжини сторін квадратів в основах піраміди, а h – висота. Очевидно, така формула не могла бути знайдена емпірично, тобто її можна розглядати як непрямий доказ наявності в Єгипті не лише емпіричної, але й дедуктивної математики (хоча наявні джерела не дозволяють говорити про наявність останньої в Давньому Єгипті). Зазначимо, однак, що з цим висновком не погоджуються багато фахівців з ранньої історії математики, як-от Нейгебауер, ван дер Варден, Юшкевич та інші. З іншого боку, їхні опоненти зауважують, що фактично всі наші відомості про єгипетську математику базуються на двох зв'язаних і кількох уривчастих текстах, які, вочевидь, слугували елементарними шкільними підручниками для майбутніх адміністративних службовців. А отже, «реконструювати за ними всю математику єгиптян – така ж помилка, якби ми за двома поганими підручниками комерційної арифметики почали реконструювати сучасну математику». (М. Я. Вигодський)

Сьогодні питання про те, чи виникла дедуктивна наука в Давній Греції, чи раніше (в Давньому Єгипті або, можливо, у Вавилоні, на що може, наприклад, вказувати наявність у Вавилоні алгоритму розв'язування квадратних рівнянь), залишається відкритим.

Особливо примітною робить формулу об'єму зрізаної піраміди той факт, що в жодному з відомих нам текстів немає жодної вказівки на те, чи були знайомі єгиптяни з тим, що зараз називається теоремою Піфагора. Популярна ж сьогодні легенда про те, що жерці-гарпедонапти будували прямі кути за допомогою мотузки, яка мала 3+4+5 = 12 вузлів, не є правдивою. На думку Нейгебауера, цю легенду вигадав Кантор, спираючись на непряме свідчення Демокріта. Популярність легенди пояснюється її красою, поетичністю (які суперечать практичній доцільності – для вимірювання прямого кута

значно зручніше користуватися твердою дерев'яною заготовкою, ніж натягувати мотузку у формі трикутника; до того ж зав'язати нековзкі міцні вузли на абсолютно однаковій відстані один від одного – надзвичайно складне завдання) та етимологією слова «гарпедонапти» – від грецького ἁρπεδονάπται, натягувальники шнура. Зазначимо, що це слово сягає церемонії закладання храму, коли в процесі ритуальних дій фараон і жерці, які йому допомагали, натягували шнур і визначали орієнтацію храму. «Молоток у моїй руці, яким я забивала кілочки, був із золота, і ти був поруч зі мною, натягуючи шнур. Твоя рука тримала кайло, коли ти встановлював чотири кути [храму], які були точно відміряні відповідно до чотирьох опор неба». (Будівельний напис із храму в Абідосі, що містить звернення богині Сешат до царя Сеті I)

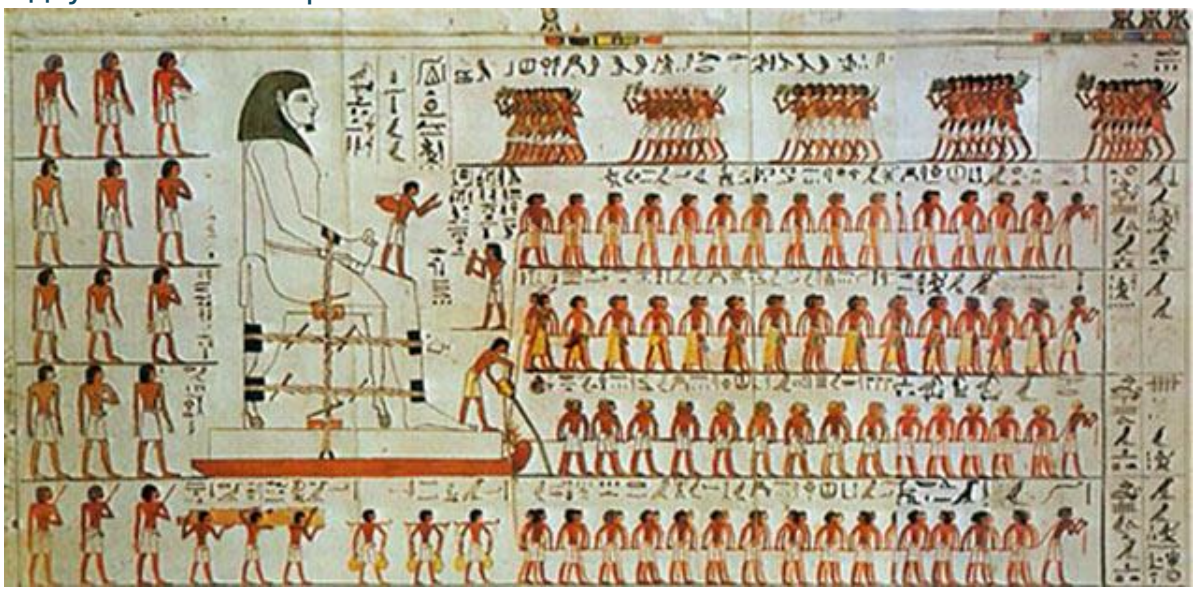


Зображення на гробниці Джесеркере у Фівах, епоха Нового царства. У верхній частині показано встановлення меж земельних ділянок. Практична математика єгиптян розвивається паралельно з ідеопластичним мистецтвом (предмети зображуються не так, як їх бачить художник, а, по можливості, в одній площині й максимально деталізовано).

Інша версія стверджує, що гарпедонапти були землемірами, головним робочим інструментом яких був туго натягнутий шнур. Але явних свідчень існування шнурів із 3+4+5 вузлами на сьогодні не існує[6].

[6] Прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4, 5 нині називають єгипетським. Ймовірно, саме про нього писав у I столітті у творі «Про Ісіду та Осіріса» Плутарх: «Схоже, єгиптяни порівнюють природу Всесвіту з найкрасивішим із трикутників». Трикутники з таким співвідношенням сторін справді зустрічаються в ансамблі піраміди Хефрена.

Підсумкові коментарі



Робітники тягнуть статую Джехутихотепа, зображення в гробниці в Дейр ель-Барші.

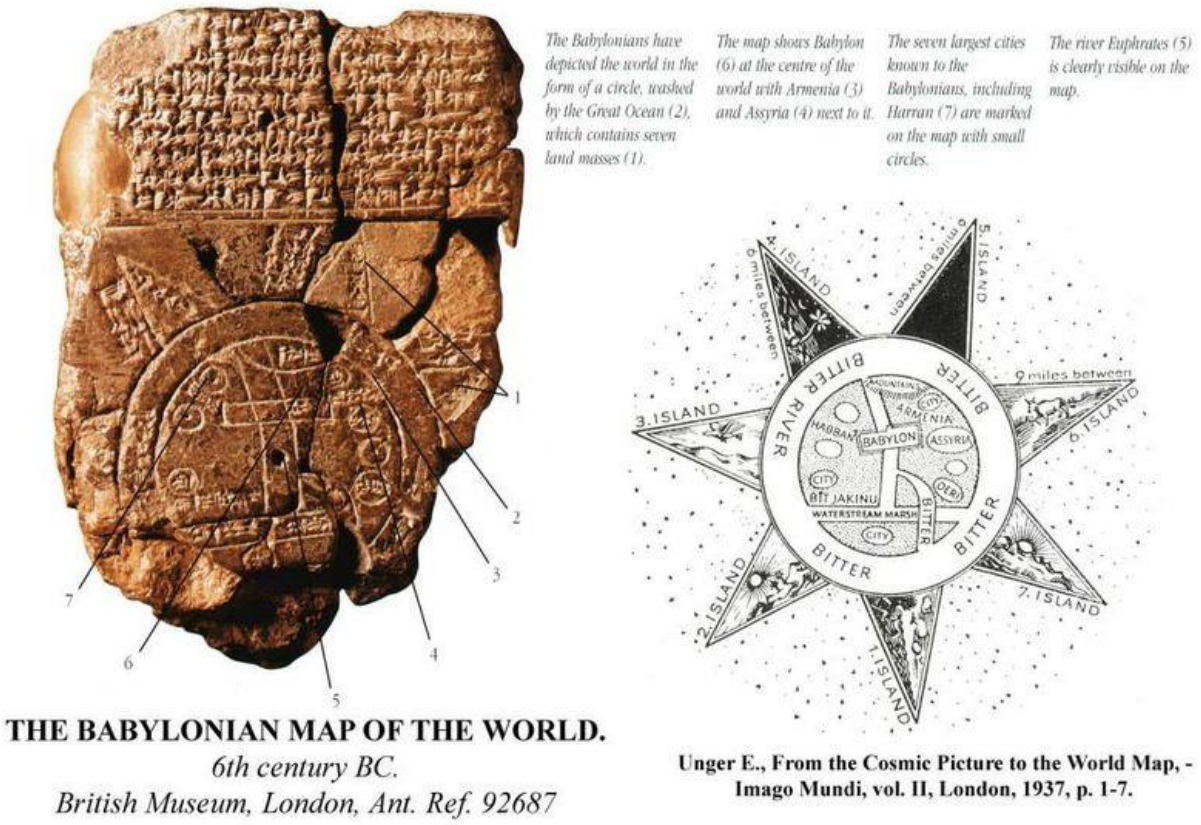
Отже, ми бачимо, що вже за часів Середнього царства геометрія в Давньому Єгипті була розвинена досить добре. Алгебра ж залишалася на початковій стадії. Можливо, частково це пов’язано з тим, що в Єгипті не існувало грошової системи — а отже, і потреби в складних підрахунках для розрахунків, як це було пізніше в інших культурах.



Про математику доби Нового царства нічого певного не відомо. З одного боку, постійні війни та повстання того часу навряд чи сприяли розвитку науки. З іншого — схожість між єгипетськими та вавилонськими методами розв’язування задач наштовхує на думку, що між цими цивілізаціями могли бути наукові контакти. Просто письмові свідчення до нашого часу не збереглися. Але це, звісно, лише припущення.

Як би там не було, вплив єгипетської математики й культури на сусідів, зокрема на греків, був дуже відчутним. Після того, як у Єгипті запанувала династія Птолемеїв, почався активний обмін ідеями між двома культурами. Самі греки не раз визнавали, наскільки багато вони запозичили в єгиптян. Так, Прокл (V ст. н. е.) писав, що «згідно з більшістю думок, геометрія була відкрита в Єгипті й походила від вимірювання площ». Геродот теж вважав, що саме там почалася геометрія, яка потім поширилася в Грецію. А Демокріт навіть говорив, що «в побудові лінії з доведеннями мене не перевершив ніхто — навіть так звані єгипетські гарпедонапти», яких він ставив дуже високо.

Месопотамія



Клинописна табличка з найдавнішою відомою картою світу. Кола позначають центри міст (цей прийом використовують і сучасні картографи). На карті зображено 6 країн і 7 островів.

Математика в Давній Месопотамії була тісно інтегрована у повсякденне життя, культуру та адміністративну систему суспільства. Її розвиток був нерозривно пов'язаний із потребами держави, економіки, релігії та астрономії.

Месопотамія, розташована в долинах Тигру та Євфрату, була переважно сільськогосподарським суспільством. Управління зрошувальними системами вимагало точних математичних розрахунків для розподілу води між полями, а також для будівництва та підтримки каналів. Державні установи й храми вели строгий облік виробництва та розподілу зерна, худоби та інших ресурсів. Математичні обчислення використовувалися для визначення податків і їх справедливого розподілу серед населення, а також для обліку запасів на складах. Месопотамія була важливим торговельним центром, і математика відігравала ключову роль у комерційних операціях, особливо при визначенні вартості товарів, обмінних операціях і погашенні боргів. Таблиці множення, ділення та обернених величин значно спрощували ці розрахунки.

Величні споруди, такі як зіккурати, храми та палаци, вимагали застосування складних математичних методів для обчислення конструкцій. Геометричні знання були необхідні для визначення площ та обсягів, а також для планування великих будівель. Месопотамці використовували геометрію для вимірювання земельних ділянок, що мало важливе значення в сільському господарстві. При розподілі землі між жителями та оцінці її родючості потрібні були точні геометричні навички.



(Фото з сайту Вікімедія)

Месопотамська математика також впливала на мистецтво та архітектуру. Пропорції будівель, симетрія на барельєфах і керамічних виробах були результатом використання математичних знань. Планування міст, включно з дорогами, стінами та площами, також вимагало геометричних методів для створення зручних і організованих просторів.

Астрономія та календарні обчислення, тісно пов'язані з математикою, відігравали ключову роль у релігійних обрядах і плануванні свят. Жерці використовували математичні методи для передбачення астрономічних явищ, таких як сонячні та місячні затемнення, що мало велике значення для релігійних церемоній. Математичні обчислення лежали в основі календарних систем, що було критично важливо для визначення дат свят і сільськогосподарських циклів. Орієнтація на небесні явища дозволяла жерцям точно визначати важливі дати для посівів і святкувань.



Математика застосовувалася і для вирішення юридичних питань, наприклад, при поділі майна або обчисленні компенсацій у судових спорах. Відомо, що Кодекс Хаммурапі — один із найдавніших збірників законів — включав правила, що вимагали застосування математичних методів для справедливого вирішення справ. Математика також використовувалася для обчислення відсотків за боргами та їх погашення. Господарська діяльність, заснована на кредитах і позиках, потребувала точних обчислень.

Математика була частиною освітньої програми писарів, які навчалися клинопису та числовим обчисленням. Писарі відігравали ключову роль у адміністративній та господарській системі Месопотамії, ведучи документи та облік ресурсів. Під час навчання вони використовували таблиці множення, ділення, квадратів і кубів чисел, що

дозволяло опановувати математичні навички, необхідні для подальшої роботи з податками, торгівлею та земельними обмірами.

Влада жерців і писарів значною мірою ґрунтувалася на їхній здатності виконувати складні математичні обчислення. Ці групи володіли знаннями, недоступними більшості населення, що надавало їм високий соціальний статус. Жерці мали доступ до астрономічних і календарних знань, що робило їх хранителями математичних умінь. Ці знання використовувалися для керування релігійними церемоніями та передбачення природних явищ, зміцнюючи їхню роль у суспільній ієрархії.

Міфи і легенди

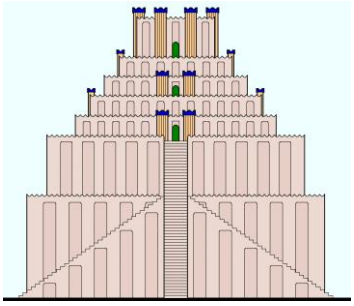


У Давній Месопотамії математикою опікувався бог Набу — бог мудрості, письма та знань. Його культ був особливо поширений у Вавилоні та Борсиппі. Набу вважався покровителем писарів, які займалися не лише веденням господарських записів, а й складними математичними обчисленнями.

Шумери використовували шістдесяткову систему числення, що була пов’язана з їхніми астрономічними та релігійними уявленнями. Число 60 вважалося священним, оскільки ділиться на багато інших чисел, а також відповідало богу Енлілю — одному з верховних богів пантеону, який керував космічним порядком, що узгоджується з важливістю числових закономірностей.



В «Епосі про Гільгамеша» зустрічаються числові символи, які свідчать про математичні уявлення древніх месопотамців. Наприклад, Гільгамеш проходить 12 стадій шляху через підземний світ, що пов’язано з поділом року на 12 місяців. Також потоп у епосі триває 7 днів, що відповідає семиденному тижню, прийнятому в Месопотамії та пізніше уведеному в світову культуру.



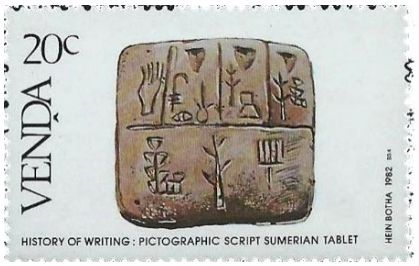
Величні зіккурати — ступінчасті храми — будувалися за строгими математичними розрахунками. Вавилоняни надавали числам великого значення в архітектурі, вважаючи, що правильні пропорції сприяють спілкуванню з богами. Наприклад, зіккурат Етеменанкі (припустимий прототип Вавилонської вежі) складався з семи ступенів, що символізували сім небесних сфер.

Математика в Давній Месопотамії була невіддільна від релігії та міфології. Числа мали сакральне значення, використовувалися в пророцтвах, будівництві храмів та адміністративних записах. Бог Набу уособлював знання та обчислення, а математичні ідеї пронизували міфи про богів і героїв, підкреслюючи божественну гармонію світу.

Трохи про клинопис

На відміну від єгиптян, які користувалися крихким папірусом, мешканці Давньої Месопотамії писали на значно міцніших глиняних табличках. За оцінками експертів, до

наших днів збереглося від 500 тисяч до двох мільйонів таких табличок, з яких близько 30–100 тисяч розшифровані та опубліковані. Приблизно 150 табличок містять тексти математичних задач, а 200 — числові таблиці. Багато інформації про розвиток математичних знань можна отримати й із розшифровок численних господарських записів та навчальних текстів.



Аналіз цих документів дозволяє зробити низку цікавих висновків. Так, наприклад, Деніз Шмандт-Бессера припустила, що для обліку майна в Шумері та Еламі (і взагалі на Близькому Сході) використовували глиняні фішки різної форми, причому кожна фішка позначала один об'єкт (корову, вівцю, кількість металу, зерна, тканин тощо). У IV тисячолітті до н. е. ці фішки почали запечатувати в глиняні контейнери. Щоб порахувати або перевірити фішки всередині, контейнер доводилося розбити. Така система була незручною, тому шумери почали перед запечатуванням залишати відбитки фішок на поверхні контейнерів[7]. Згодом обмежилися лише відбитками, а потім просто малюнками фішок, звідки й виникла ідея письма, а об'ємний контейнер замінили зручною плоскою табличкою.

Таким чином, за Шмандт-Бессерою, перші символи письма мали форму об'єктів, що рахувалися, і взагалі письмо виникло з потреби фіксувати математичні поняття. Якщо гіпотеза Шмандт-Бессери вірна, це також пояснює розвиток раннього письма в інших частинах Старого Світу: можна припустити, що всі відомі системи (еламська, егейська, єгипетська, можливо, також прото-індійська та китайська) виникли завдяки поширенню вже існуючої ідеї письма. Самостійно з'явилися, здається, лише (слабо вивчені) письмові системи ольмеків та острова Пасхи. Розвиток письма збігається за часом із появою міст і становленням державності. У той же час у Давній Месопотамії винаходять колесо та освоюють плавку міді.



Найдавнішим пам'ятником шумерського письма, можливо, є табличка з Киша (за однією з версій, 3500 р. до н. е.). Відбиток із таблички зберігається в колекції Ешмолеанського музею в Оксфорді, а оригінал — у Національному музеї Іраку. Напис виконаний примітивними клинописними знаками; Пітер Стірнс називає його найдавнішим письмовим документом.

За нею за часом ідуть документи, знайдені під час розкопок стародавнього міста Урук, що відносяться до 3300 року до н. е. Цікаво, що на урукських табличках зафіксовані історично перші відомі бухгалтерські та математичні помилки. У ті часи люди вже усвідомлювали, що деталі комерційних угод можуть забуватися або свідомо спотворюватися партнерами, і тому перестали покладатися на пам'ять, записуючи все на спеціальних глиняних табличках.

[7] Деяким аналогом месопотамських фішок можна вважати і перуанські кіпу, відомі ще з цивілізації Уарі (VII ст. н. е.) та вдосконалені інками (XV–XVI ст.), які використовувалися для передачі числової інформації, що є необхідною умовою розвитку державності.



Частина таких господарських записів належить якомусь адміністратору Кушиму, чия службова функція полягала у підрахунку ячменю. Вони містять дати, що свідчать про те, що шумери відстежували часи року, подібно до нас, але з довгим «високосним» місяцем кожні три, а не чотири роки. На одній із цих табличок зафіксовано найраніший відомий приклад бухгалтерської помилки: згідно записів Кушиму на склад привезли 3910 чаш ячменю (1 чаша ≈ 5 літрів), а прийняв він 3895 чаш. Розглядають[Green, 2022] три можливі причини нестачі: ненавмисна помилка (не помітили групу символів), шахрайство або Кушим із начальником (чий підпис також є на табличці) просто взяли трохи ячменю для приготування пива після важкої праці.

На табличках Кушима є приклад не лише першої бухгалтерської помилки, але й першої відомої математичної: він зробив собі «шпаргалку» для переведення мір, ваги та обсягів між різними системами, у якій, зокрема, зазначено, що бокова чаша (еквівалентна 5 чашам), розділена навпіл, усе одно дорівнює боковій чаші.

Нумерація, системи числення та арифметика

У клинописних табличках зустрічаються три системи числення: десятково-шістдесяткова непозиційна, десяткова непозиційна та шістдесяткова позиційна.

У першій із них існували дві основи: десять і шість, причому одиниці кожного наступного розряду утворювалися множенням на десять або шість відповідних одиниць попереднього розряду. Тобто перший розряд складався з одиниць, другий — із десятків, третій — із шістдесятків і так далі.

На початку II тисячоліття до н. е. у вавилонських господарських текстах з’являється десяткова система позначення чисел, яка використовувала десяткові шумерські символи.[8]

У математичних же текстах найчастіше використовувалася позиційна система числення з основою 60. Існують чотири головні версії походження цієї системи:

Тюро-Данжен стверджує, що вона виникла як спроба виправити недоліки більш ранньої десятково-шістдесяткової непозиційної системи.

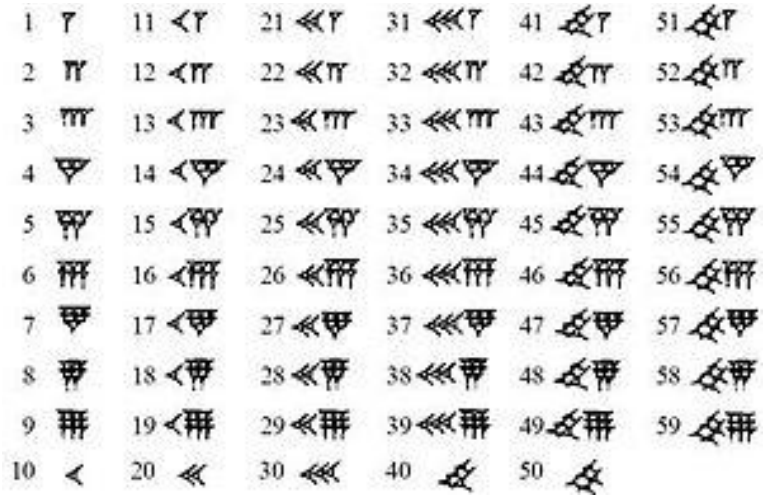
Жорж Іфра, аналізуючи сліди можливого використання двох давніших систем — дванадцяткової та п’ятіркової, вважає, що шістдесяткова система з’явилася внаслідок їх накладання.

Веселовський, у коментарях до роботи Ван дер Вардена, вважає, що основа 60 виникла з лічби на пальцях, а позиційність система отримала завдяки лічбі на абаку.

[8] Обидві ці системи практично не зустрічаються в математичних текстах (виявлені лише в документах YBC 1764, YBC 4607, VAT 7531, AO 6484, VAT 7848), проте могли паралельно використовуватися навіть в одному господарському тексті (див., наприклад, [Ріфтін, 1937, 12, табл. IX, №90; табл. XVII, №112]).

Нейгебауер припускає, що ця система сформувалася з практичних потреб: після акадського завоювання шумерської держави там тривалий час одночасно існували дві грошово-вагові одиниці — шекель (сикль) та міна, причому було встановлено співвідношення 1 міна = 60 шекелів. Пізніше це розподілення породило систему запису не лише товарно-грошових величин, але й абстрактних чисел.

Очевидно, користуватися системою з основою 60 було зручно: числа в ній «коротші», ніж у звичній десятковій системі, а основа ділиться на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30. З іншого боку, треба було мати назви та позначення для шістдесяти різних цифр (таблиця множення на глиняних табличках налічувала 1770 рядків). Тому вавилонським математикам довелося розробити спеціальну техніку запису: число зображалося в позиційній 60-річній системі, а його шістдесяткові цифри — у адитивній десятковій, як показано у таблиці.



Це означає, що насправді вавилонська система розподілялася на підсистеми з десятковим записом. Цікаво, що всі 59 цифр записувалися лише двома базовими символами: «простим клином» зі значенням 1 і «кутовим гачком» зі значенням 10.



Таблиця множення на 10

Числа, кратні 60, від 60 до 59·60, записувалися так само, як відповідні множники від 1 до 59, розташовані ліворуч від чисел менших за 60. Згодом простий клин почав позначати не лише 1 і 60, а й будь-які значення 60*n*, а також дроби виду 1/60 і 1/60*n*. Аналогічно, кутовий гачок використовувався для всіх чисел виду 10·60*n*, 1/6 і 10/60*n*. Пізніше (приблизно в перському періоді) з'явився спеціальний знак для порожніх шістдесяткових розрядів, що виконував роль своєрідного нуля. Проте цей знак ніколи не ставили на початку або в кінці числа, тому немає способу однозначно прочитати вавилонські числа та визначити, якому шістдесятковому розряду належить цифра[9].

[9] Найдавніше, на сьогодні, згадування нуля відноситься приблизно до 300 року до нашої ери. Цікаво зауважити, що приблизно в той самий час (близько I століття до н. е.) нуль був винайдений і в цивілізації майя.

Додавання та віднімання для цілих та дробових чисел в цій системі виконувалися так само, як у звичній десятковій системі. Щоб полегшити множення, існувала величезна кількість таблиць множення цілих та дробових чисел. Ділення вигляду $a{:}b$ здійснювалося як множення числа a на $1/b$. При множенні дробів табличними були числа, обернені до «правильних» чисел виду $2^{\alpha}\ 3^{\beta}\ 5^{\gamma}$. Ділення на «неправильне» число траплялося рідко[10], і вказівки, як його виконували, не збереглися.

Велика кількість обчислень у Вавилоні була занотована у вигляді таблиць. Окрім уже згаданих таблиць додавання, множення, обернених величин і «ділення», існували таблиці квадратів цілих чисел від 1 до 60 та степенів деяких чисел до десятого включно, наближені значення квадратних коренів[11], таблиці відповідності степенів 2^n і їхніх показників[12] n, а також таблиці чисел[13] виду $n^2 + n^3$.

Серед цікавих арифметичних результатів варто відзначити, що вавилоняни знали правило сумування n членів арифметичної прогресії $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$.

Зустрічаються також задачі, в яких необхідно просумувати перші n членів геометричної прогресії, наприклад 1, 2, 2^2, …, 2^9. Хоча точний метод розв'язання таких задач у Вавилоні невідомий, Нейгебауер припускає, що вавилоняни знаходили

$$S_n = (S_{n-1} + 1) + S_{n-1}.$$

Вавилонянам була відома й формула суми ряду квадратів послідовних натуральних чисел

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{3} + n \cdot \frac{2}{3}\right) \sum_{i=1}^{n} i.$$

У Вавилоні, зі його добре розвиненою товарно-грошовою системою, з'являлися й задачі на прості та складні відсотки, а також кредити.

Геометрія

Як і в Єгипті, у шумеро-вавилонській цивілізації геометрія виникла з практичних потреб. Першими геометричними документами, мабуть, можна вважати господарські тексти, що містили плани будинків і полів із зазначеними на них розмірами елементів. Часто поля мали форму прямокутників, трикутників і трапецій, що вимагало від

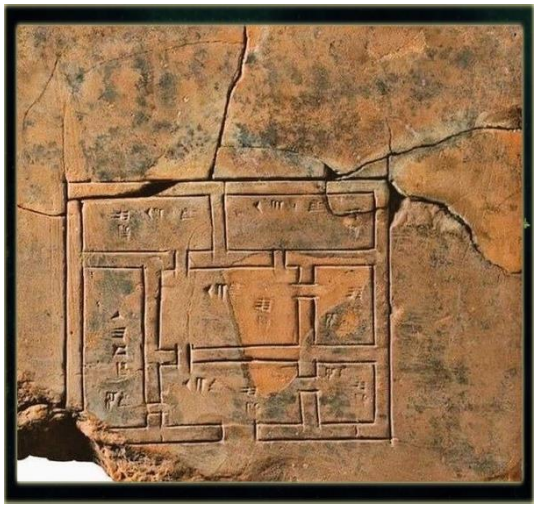
[10] Таке ділення найчастіше зустрічалося при розв'язанні квадратних рівнянь. У ранніх таблицях навпроти «неправильних» чисел стояла позначка «оберненого немає». У пізніших таблицях зустрічаються наближені значення обернених чисел і до деяких неправильних, наприклад, до числа сім та до всіх чисел від 56 до 80.

[11] Спосіб, яким вавилоняни витягували ірраціональний квадратний корінь, невідомий. Основна на сьогодні гіпотеза полягає в тому, що в таблицях точних квадратів знаходилися два певні наближення: одне було більше, а інше — менше шуканого кореня. Тоді їхнє середнє арифметичне та середнє гармонійне також «лежать по різні боки» кореня і утворюють кращі наближення. Повторюючи цей алгоритм кілька разів, отримують значення кореня з дивовижно великою точністю.

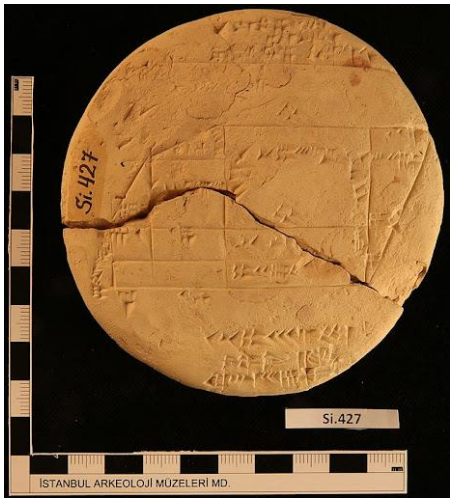
[12] З'являються у задачах на позики під відсотки.

[13] З'являються в задачах, які зводилися до кубічного рівняння.

шумерських і вавилонських землемірів уміння виконувати складні геометричні обчислення.

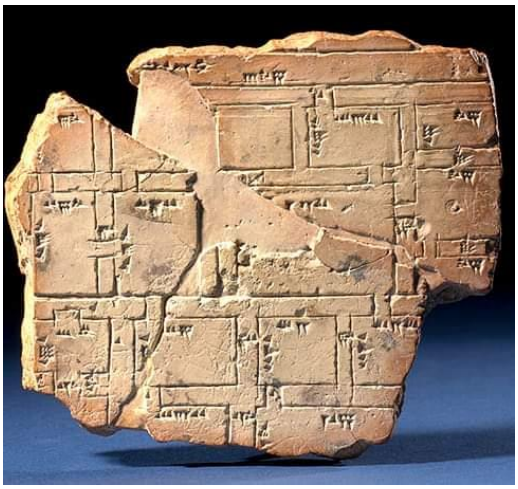


План дома з Умми, приблизно 2400-2700 р. до н.е.



План поля, приблизно 1900-1600 г. до н.е.

На пізніших табличках із навчальними текстами та задачами площинні геометричні фігури (прямокутник, трикутник, коло тощо) розглядаються як абстрактні геометричні об'єкти. (Просторові ж фігури, за винятком паралелепіпеда, вивчаються лише як конкретні, що трапляються в повсякденному житті — будівельні блоки, посудини, комори тощо.)



План дома, приблизно VI ст. до н.е.

Взагалі, часто геометричні формулювання задач слугували лише оболонкою для арифметичної чи алгебраїчної проблеми. Проте навіть так, порівняно з єгиптянами, мешканці Месопотамії у вивченні геометрії просунулися досить далеко. Вони вміли знаходити площі трикутника, прямокутника й трапеції, вивчали деякі правильні многокутники, сегменти кола та зрізані конуси. Наближення числа π було не настільки точним, як у Єгипті: площу кола вважали рівною $3r^2$, а довжину кола — $6r$.



Навчальна табличка YBC 7302 зі школи писців у Сузі, на якій зображено 3 числа: 3 (над колом), 45 (усередині кола) і 9 (поза колом праворуч). Із контексту (схематичне коло з числами) випливає, що це обчислення наближеної площі кола зі значенням $\pi = 3$.

В одному з текстів трапляється точніше наближення $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$. Наближено, як добуток півсум протилежних сторін, обчислювалася й площа чотирикутника довільного виду. Для знаходження об'єму паралелепіпеда та циліндра знаходили добуток площі основи на висоту. Цікаво, що в розшифрованих табличках не зустрічаються задачі на об'єми піраміди та конуса, а лише задачі для зрізаних фігур.

Із частково розшифрованих текстів незрозуміло, чи знали у Вавилоні точну формулу об'єму усіченої піраміди з квадратними основами $V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]h$ чи користувалися наближеною формулою $V = \frac{a^2+b^2}{2}h.$

Окрім задач на площі та об'єми, в навчальних текстах трапляються задачі на подібність фігур, при розв'язанні яких активно використовувалася теорема про пропорційність відрізків на прямих, перетнутих кількома паралельними прямими (відома зараз як теорема Фалеса).



Знали в давньому Вавилоні й теорему Піфагора. У 1922 році філантроп Джордж Артур Плімптон викупив у антиквара Едгара Джеймса Бенкса вавилонську глиняну табличку, датовану приблизно 1800 роком до н. е. Тепер вона відома як Plimpton 322 і зберігається в Колумбійському університеті. Вважається, що вона слугувала для навчання дітей математиці. Як було розшифровано у 1940-х роках, на збереженій частині зображена таблиця з чотирьох стовпців і п'ятнадцяти рядків чисел. Другий і третій стовпці містять пару чисел із піфагорової трійки, тобто

числа a і c, що входять у трійку $a^2+b^2=c^2$. Перший стовпець цієї таблиці містить число, яке може бути отримане як $(c/b)^2$. Останній стовпець містить номер рядка (від 1 до 15). Імовірно, спочатку в таблиці існував стовпець з основами цих піфагорових трійок, але табличку було розколото, і частину її втрачено.

Нещодавно ця розшифровка була переглянута й розширена. Мансфілд і Вілдерберг[Mansfield D.F., Wildberger, 2017] вважають, що Plimpton 322 — найдавніша тригонометрична таблиця тангенсів, якою надзвичайно легко й зручно користуватися. З цими висновками погоджуються не всі. Так, Крістін Пруст зазначає, що у вавилонських текстах немає вказівок на те, що подібні таблички взагалі для чогось використовувалися, тому «ця гіпотеза надійна з математичного погляду, але є доволі спекулятивною».

Однак можна помітити, що трикутники в таблиці впорядковані за спаданням кута, протилежного висоті піфагорової трійки, причому ці кути належать проміжку від трохи менш ніж 45° до трохи більш ніж 30°. Найбільше спільне кратне всіх основ наведених пифагорових трійок дорівнює $1296000=60^4$. Відношення висоти до основи (тангенс) і відношення гіпотенузи до основи (1/косинус) виражаються скінченними шістдесятковими дробами. Ці спостереження підтверджують думку Мансфілда й Вілдерберга про існування у Вавилоні розвинутої тригонометрії, що базувалася не на колах, а на пропорціях у трикутниках.

Але, звісно, найяскравішою частиною вавилонської математики є не арифметичні задачі чи геометрія, а зародження в ній систематичної алгебри. Алгебраїчні досягнення вавилонян були настільки значними, що деякі історики математики стверджують: дедуктивна математика зародилася саме у Вавилоні, а не пізніше, в Греції.

Алгебра

У клинописних текстах записано багато задач на рівняння та системи рівнянь. Часто ці задачі формулювалися у геометричних термінах, але для їх розв’язання необхідно було користуватися алгебраїчними методами. При цьому невідомі величини зазвичай називалися «довжина», «ширина» і «глибина» (замість звичних нам x, y і z).

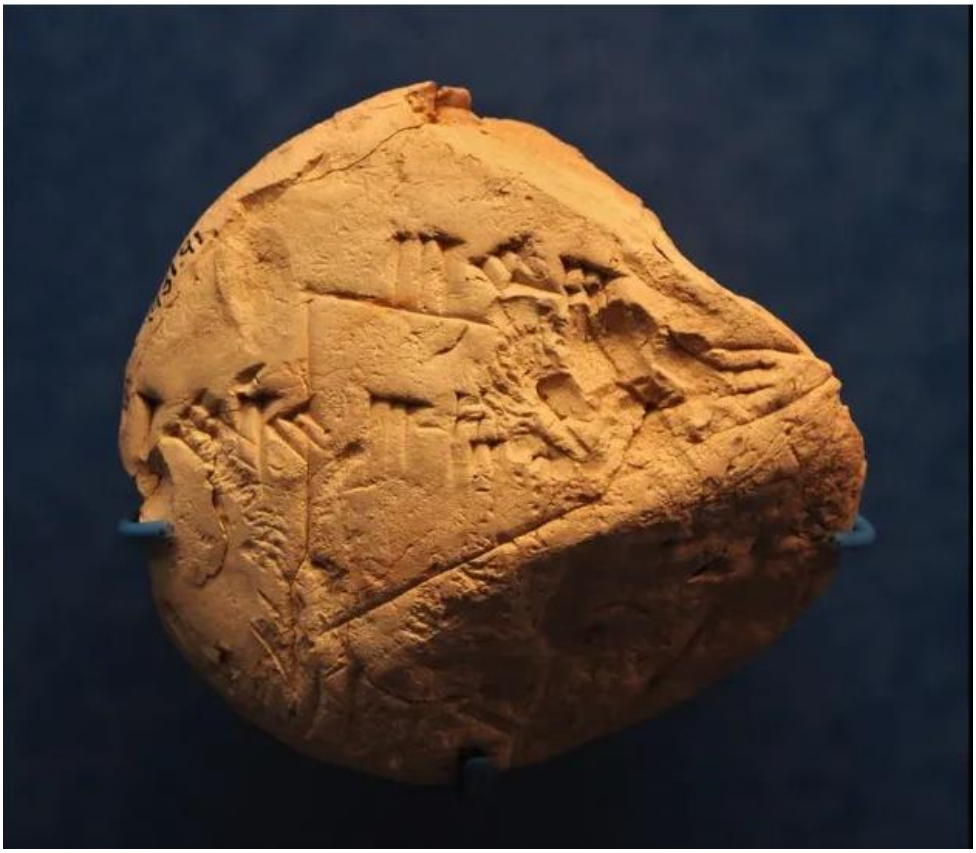
Типовим прикладом таких задач є: «Трапеція, у ній дві смуги. 13,3 — верхня площа, 22,57 — друга площа. Для верхньої довжини третя частина нижньої довжини. Те, наскільки верхня ширина виступає над нижньою шириною, складені разом, дають 36. Довжини, ширини й розділова лінія — що вони?» [Neugebauer, 1975]. Очевидно, що ця задача зводиться до розв’язання системи лінійних рівнянь із п’ятьма невідомими.

Для розв’язання систем лінійних рівнянь вавилоняни користувалися найрізноманітнішими методами: виключення невідомих, введення допоміжних змінних тощо. Цікаво, що під час розв’язання систем двох рівнянь із двома невідомими вони часто свідомо намагалися знайти півсуму й піврізницю шуканих величин.

Центральне місце у шумеро-вавилонській алгебрі займають задачі на квадратні рівняння та системи, що зводяться до них.

Текст 13901, який зберігається в Британському музеї, містить задачу: «Я віднімаю сторону квадрата від його площі й отримую 14,30». Переклавши її з геометричної термінології давніх вавилонян на сучасну мову, отримаємо рівняння $x^2 - x =$

14,30. Цікаво відзначити, що тут віднімаються величини різної розмірності. В епоху еллінізму та багато століть по ній подібні порушення принципу неоднорідності будуть, практично, немислимими.



Вавилонська навчальна глиняна табличка з Кіша (приблизно 4000 років), зображає прямокутний трикутник із клинописними числами, що вказують розміри його катетів: 1,875 і 3,75. Завдання: знайти площу трикутника. Проте учень припустився помилки у розрахунку площі — він отримав 3,1468 (музей Ешмола, Оксфорд).

Для початку зауважимо, що в Шумері й у Вавилоні не знали від'ємних чисел, отже, не розглядали й рівняння, які не мають додатних коренів. Так, у клинописних табличках описані методи розв'язання рівнянь виду $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$ та $ax^2 - bx = c$, де a, b, c — додатні числа.

Для розв'язання рівнянь виду $x^2 \pm bx = c$, схоже, вавилоняни користувалися тим самим прийомом, що й зараз, а саме виділяли повний квадрат у лівій частині $\left(x \pm \frac{1}{2}a\right)^2 = b + (\frac{1}{2}a)^2$.

Саме знання цієї формули дозволяє багатьом авторам стверджувати, що дедуктивна математика зародилася саме в давній Месопотамії, а не набагато пізніше — в Греції. Хоча, звичайно, саме поняття «дедуктивної математики» дуже складно визначити. Побічною ознакою її присутності можна вважати чітко сформульовані в деяких табличках загальні правила (формули) для знаходження певних величин, а не лише конкретні розв'язання окремих задач, як це було в математиці давнього Єгипту.

Найвідоміший приклад — текст AO 6770 з Урука: «Довжина і ширина разом дорівнюють площі. Чини так. Добуток постав двічі. Відніми від нього одиницю. Візьми від цього обернене. На добуток, який у тебе залишився, помнож це — і ти отримаєш ширину».

Як бачимо, головною особливістю вавилонської математики стало те, що числа й величини могли розглядатися не лише як конкретні вимірювання, а як абстрактні об'єкти, з якими можна виконувати різноманітні алгебраїчні перетворення. Це був важливий крок на шляху до появи алгебри в тому вигляді, у якому вона відома сьогодні.

Розв'язання задач, що зводилися до квадратних рівнянь, вимагало усвідомлення поняття квадратного кореня. З розшифрованих на сьогодні таблиць неясно, чи знали вавилоняни про існування ірраціональних чисел. Для добування квадратних коренів із чисел, що не є повними квадратами, використовувалося наближене обчислення $\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a}$, де a^2 — найбільший цілий квадрат, менший за a^2+r. Воно ґрунтувалося на формулі $\left(a+\frac{r}{2a}\right)^2 = a^2 + r + \left(\frac{r}{2a}\right)^2$, де $\left(\frac{r}{2a}\right)^2$ настільки мале, що ним можна знехтувати.

Астрономія



Кругла кам'яна табличка з бібліотеки Ашшурбаніпала, 650 р. до н. е. Комп'ютерний аналіз показує, що на ній зображене небо над Месопотамією у 3300 р. до н. е., що доводить її більш раннє шумерське походження. (фото з сайту piramideinformativa.com)

Розвиток математичних знань призвів до розвитку астрономії. Вавилонські астрономи розробили дуже точний календар. Вони ділили день на 12 годин, а годину — на 30 хвилин, рік у них складався з 365 днів. Основну увагу вавилонські астрономи приділяли руху зірок і планет. З високою точністю вони могли передбачати сонячні й місячні затемнення. Саме вавилоняни, в епоху правління царя Навуходоносора, виділили зодіак.

У бібліотеці Ашшурбаніпала знайдено вавилонський текст Мул Апін, перша половина якого має астрологічний зміст і містить передбачення майбутнього на основі руху Венери[Pannekoek, 2011]. В іншому тексті, датованому V століттям до н. е., подано систематичний огляд відносних положень сузір'їв. Олмстед[Olmstead, 1938] згадує ефемериди, датовані 568 р. до н. е.

Цікавий аналіз місячних ефемерид для 133/132 р. до н. е., знайдених у табличках III–II ст. до н. е., наведений у Юшкевича [Юшкевич, 1970]. У них перший стовпець — номер місяця, другий — число й шістдесяткові дроби діб для моменту з'єднання Місяця із Сонцем:

12	28,55,57,58	7	29,31,21,22
1	28,37,57,58	8	29,49,21,22
2	28,19,57,58	9	29,56,36,38
3	28,19,21,22	10	29,38,36,38
4	28,37,21,22	11	29,20,36,38
5	28,55,21,22	12	29, 2,36,38
6	29,13,21,22		

Тут у другому стовпці перші три числа, далі середні шість і останні чотири числа утворюють спадну, зростаючу й знову спадну арифметичну прогресію. Хоча в природі ефемериди підпорядковуються складнішій періодичній закономірності, яку вавилонські астрономи не змогли відкрити, вони користувалися подібними наближеними результатами. Графіком цієї функції є ламана лінія. Звісно, в ту епоху вчені не будували графіків і не оперували поняттям «функція». Однак саме у давньому Вавилоні з'явилися геометричні методи дослідження руху небесних тіл.



Так, Метью Оссендрівер, проаналізувавши п'ять клинописних табличок 350–50 років до н. е., показав[Ossendrijver, 2016] , що вавилоняни розраховували залежність швидкості від часу так само, як це робиться в сучасних графіках. Подібні обчислення проводилися, наприклад, для визначення зміщення Юпітера вздовж екліптики — великого кола небесної сфери, яким відбувається видимий річний рух Сонця. Раніше вважалося, що взаємозв'язок між рухом, положенням тіла в просторі й часом усвідомили лише у XIV столітті в Оксфорді та Парижі, але дослідження Оссендрівера показує, що вона була відома вавилонянам уже в I столітті до н. е.

Крім того, на табличках використано геометричні обчислення, які з'явилися ще раніше — у 1800–1600 роках до н. е. Уже в VIII–VII століттях до н. е. вавилонські жерці вміли передбачати місячні й сонячні затемнення. На підтвердження цього збереглися клинописні таблички, одна з яких, датована початком VII століття до н. е., містить такий текст: «Чотирнадцятого відбудеться затемнення; це несприятливо для Еламу й Амурру, але сприятливо для царя, мого володаря; нехай цар, мій володар, заспокоїться. Воно буде видно без Венери. Царю, мій володарю, я говорю: буде затемнення. Із Ірасшіілу, царський слуга».

Аналізуючи дані багатовікових астрономічних спостережень, вавилонські жерці помітили, що затемнення повторюються через певні інтервали часу – сароси (від єгипетського слова «повторення»). Тривалість сароса становить 6585 днів. Упродовж одного сароса відбувається 43 сонячні та 28 місячних затемнень. Відкриття сароса стало величезним внеском у науку вавилонських астрономів, які, ймовірно, першими в історії людства навчилися передбачати затемнення. Однак, на відміну від місячних затемнень,

які видно на всій нічній стороні Землі, сонячні затемнення спостерігаються лише в обмеженій області. Це значно ускладнювало їхнє точне передбачення, оскільки кожне сонячне затемнення проявляється в новому місці.



Вавилонська астрономія справила потужний вплив на грецьку астрономію (і, загалом, на науку). Грецькі астрономи запозичили у вавилонян стиль записів і методи обчислень, деякі астрономічні прилади та шістдесяткову систему числення. Згодом цю систему використовували араби й середньовічні астрономи [14] для подання дробів. Тому середньовічні вчені часто називали шістдесяткові дроби «астрономічними». Ці дроби застосовувалися для запису градусної міри кутів (повне коло має градусну міру 360°) та астрономічних і географічних координат. В одному градусі – 60 хвилин, а в одній хвилині – 60 секунд. Від шістдесяткової системи нам «у спадок» дісталися також поділ години на 60 хвилин, а хвилини – на 60 секунд.

Підсумкові коментарі

Отже, математика Давньої Месопотамії, що охоплювала області Шумеру, Аккаду, Ассирії та Вавилонії, мала багато унікальних особливостей, які вирізняли її серед інших давніх математичних традицій. Вона була закладена давніми шумерами (III тисячоліття до н. е.) й розвивалася в контексті практичних потреб суспільства, таких як сільське господарство, будівництво, астрономія та управління державою.

Однією з найважливіших особливостей математики в Месопотамії була шістдесяткова система числення (заснована на числі 60), яка вперше з'явилася у шумерів і була згодом перейнята вавилонянами.

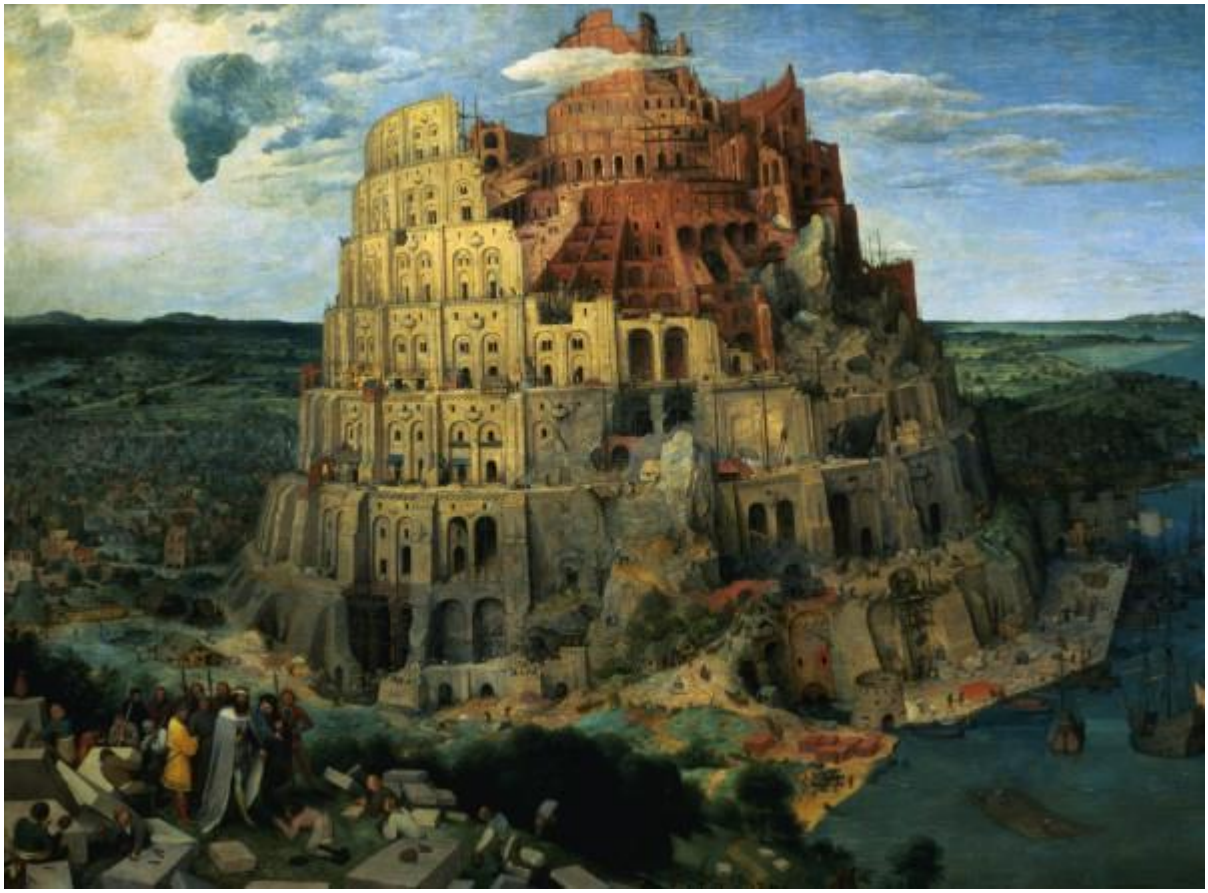
Математичні розрахунки й таблиці записувалися за допомогою клинопису на глиняних табличках. Завдяки цьому багато давніх записів збереглися до наших днів, даючи сучасні уявлення про математику того часу. Числа зображалися за допомогою комбінації клиноподібних знаків, що позначали одиниці, десятки та їх кратні в системі числення.

Математика Давнього Шумеру була суто прикладною. Вона застосовувалася для розв'язання практичних задач, пов'язаних з вимірюванням земельних ділянок, обчисленням об'ємів і площ (наприклад, для будівництва споруд, іригаційних систем), розрахунком податків і розподілом сільськогосподарської продукції. У табличках містяться приклади задач на поділ і розподіл ресурсів, що свідчить про важливість математичних розрахунків для економіки та господарського життя Месопотамії.

Пізніше (у II–I тисячоліттях до н. е.) вавилоняни використали знання шумерів і розвинули вже більш теоретичну математику, яка не служила виключно для розв'язання

[14] У XIII столітті ректор Паризького університету П'єр Філомен (Petrus de Dacia) виступив за повсюдне впровадження шістдесяткової системи в Європі. У XV столітті з аналогічним закликом виступив Йоганн Гмунден, професор математики Віденського університету. Починаючи з XVI століття, десяткові дроби в Європі повністю витісняють шістдесяткові. Нині в КНР шістдесяткова система іноді використовується не лише для секунд і хвилин, але й для років. Наприклад, у п'ятому виданні (2005 рік) словника Сяньдай Ханьюй Цидянь наведена таблиця правителів із зазначенням року як за десятковою системою, так і за ієрогліфічним позначенням номера року в шістдесятирічному циклі.

технічних та економічних задач. Чимало задач, що розглядалися у Вавилоні, взагалі не мали практичного застосування.



Пітер Брейгель Старший, Вавілонська вежа, 1563 р.

Месопотамські математики були одними з перших, хто розробив методи розв'язання квадратних і лінійних рівнянь. Вони могли розв'язувати складні системи рівнянь, використовуючи таблиці та спеціальні методи. При цьому задачі розв'язувалися без використання формальних позначень, як у сучасній алгебрі. Розв'язання будувалося на практичному підході до знаходження невідомих величин.

У Месопотамії широко застосовувалися таблиці для спрощення складних обчислень. Існували таблиці для множення, ділення, обчислення квадратів, кубів і обернених величин. Вони дозволяли швидко знаходити розв'язання задач, пов'язаних з астрономічними розрахунками, управлінням сільськогосподарськими угіддями та торгівлею.

У математиці Месопотамії важливе місце посідала геометрія, яка застосовувалася для обчислення площ і об'ємів різних фігур, таких як прямокутники, трикутники, трапеції та циліндри. Приблизні значення для площі кола й об'єму циліндра також використовувалися для практичних потреб. Наприклад, число π у Месопотамії приймали приблизно рівним 3. Особливо цікавим є застосування теореми Піфагора задовго до самого Піфагора: вавилоняни знали про співвідношення сторін у прямокутному трикутнику й могли використовувати його для розрахунків. У Месопотамії були відомі трикутники з цілими числами сторін, які сьогодні називаються піфагоровими трійками (наприклад, 3, 4 і 5). Ці знання застосовувалися для вимірювань і будівництва, хоча

формальна теорема Піфагора ще не була сформульована. Таблички містять записи, що показують використання цього принципу для розв’язання задач на знаходження сторін трикутників та інших геометричних об’єктів.

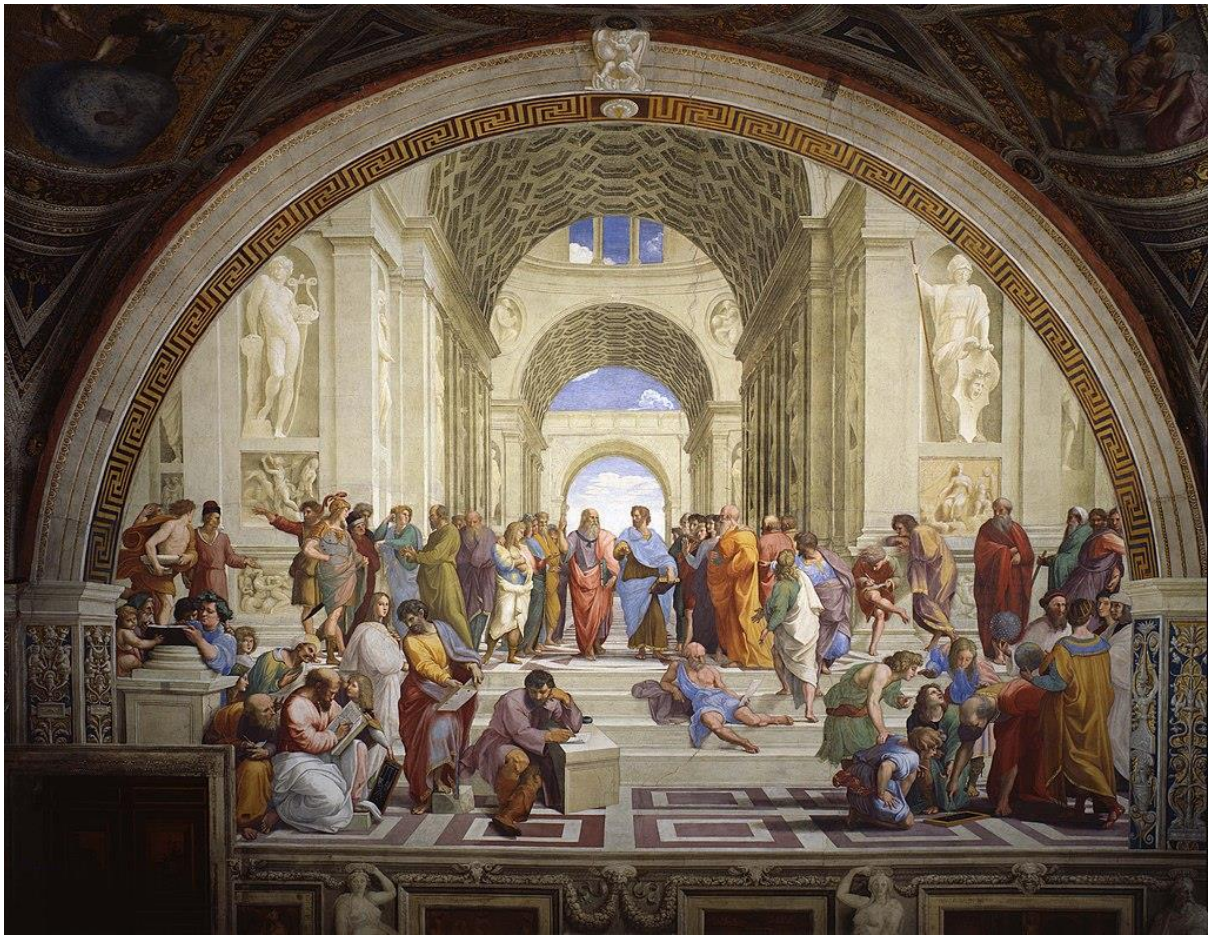
На відміну від пізніших індійських та арабських математичних традицій, у месопотамській математиці не було концепції нуля як числа. У системі числення використовувалися пропуски для позначення порожніх позицій, але символу, еквівалентного нулю, вавилоняни не вигадали. Це обмежувало їхні обчислення, особливо у випадку великих чисел або складних рівнянь, і робило систему дещо менш гнучкою порівняно з десятковою.

Астрономічні спостереження були важливою частиною життя Месопотамії, і математика застосовувалася для обчислення рухів планет та фаз Місяця. Месопотамці розробили методи для передбачення сонячних і місячних затемнень. Вони також були одними з перших, хто використав математику для створення календарних систем і передбачення природних явищ, що мало велике значення для сільського господарства.

Математичні розрахунки використовувалися для управління державою, особливо в галузі збору податків, розподілу земель і контролю за торговими угодами. Економічна та адміністративна діяльність у Давній Месопотамії потребувала точних обчислень і ведення записів. Математика відігравала ключову роль у плануванні будівництва споруд та іригаційних систем, що було життєво важливим для регіону з високою залежністю від сільського господарства.

На відміну від давньогрецької математики, месопотамська не прагнула до абстрактних теоретичних висновків і не була пов’язана з розвитком формальної доказової бази. Це була здебільшого практична, «інженерна» математика, зорієнтована на розв’язання конкретних проблем і завдань. Математика Месопотамії, таким чином, розвивалася без формальних доведень чи аксіоматики, що відрізняло її від грецької математики, де доведення відігравали ключову роль. Однак деякі результати вавилонської й шумерської математики (наприклад, формула коренів квадратного рівняння) не могли бути отримані лише емпіричним шляхом. Це означає, що вчені тієї епохи вже мали уявлення про логічне доведення, ставши попередниками виникнення та розвитку дедуктивної науки в Давній Греції.

Давня Греція



Рафаель Санті, La Scuola di Atene (Афінська школа), 1510–1511 рр.[15]

Математика Давньої Греції – це не просто зібрання знань про числа й фігури, а найважливіша частина загальнолюдської культури, що сформувала основи логічного мислення та наукового методу. На відміну від Давнього Єгипту й Месопотамії, де математичні знання передавалися здебільшого безособово, через практичну діяльність безіменних чиновників і писців, грецька традиція породила «культуру імен», пов'язану з відкриттям і розвитком ідей. Філософи й учені Давньої Греції прагнули не лише до пізнання, а й підкреслювали значення передачі знань від учителя до учня.

[15]На фресці у Станцу делла Сеньятура Ватиканського палацу зображено великий алегоричний збір мислителів, вчених і видатних постатей античності та пізніших часів. У центрі композиції стоять Платон, зі рисами Леонардо да Вінчі, і Аристотель, який тримає «Нікомахову етику», символізуючи різні підходи до філософії та науки. Навколо них зібрані ключові мислителі: Сократ, що прославився своїм методом діалогу; Парменід, дослідник буття; Геракліт з рисами Мікеланджело Буонарроті; Діоген Сінопський, символ кінічного аскетизму; Піфагор разом із дружиною Феано, що втілюють математичну і філософську традицію; Евклід або Архімед із учнями; Клавдій Птолемей, астроном і географ; Плотін, мислитель неоплатонізму; Зенон із Кітіона або Зенон Елейський, Епікур, Боецій або Анаксімандр чи Емпедокл, Аверроес, Страбон або Заратуштра, Протоген; Есхін, ритор; Антисфен або Ксенофонт, учні Сократа; Алківіад або Олександр Македонський; а також Гіпатія, для образу якої, як вважається, позувала кохана Рафаеля, Маргеріта. На фресці присутні також алегоричні та художні постаті: Апеллес, що символізує мистецтво, і сам Рафаель, який додав свій автопортрет.

Так, за свідченням карфагенянина Апулея, Фалес Мілетський був визнаний першим геометром, найдосвідченішим дослідником природи й уважним спостерігачем небесних світил. Його відкриття, засновані на спостереженнях і роздумах, стали підґрунтям подальшого розвитку науки. Водночас сам Фалес бачив свою заслугу не в особистій славі, а в поширенні істини. Як розповідає переказ, коли Мандрайт із Прієни запропонував йому будь-яку винагороду за передане знання, мудрий Фалес відмовився від вигоди, вимагаючи лише одного: щоб учень не привласнював його відкриття, а відкрито визнавав їх автором саме Фалеса[16]. Цей епізод яскраво ілюструє, як у грецькій культурі цінувалося авторство ідей та їхній зв'язок із конкретними особами – завдяки чому традиція наукових відкриттів не переривалася, а розвивалася.



Скіфос, чаша для вина, що зберігається в Археологічному музеї Ламії,

є одним із найдавніших свідчень астрономічних знань давніх греків.[17]

Імена таких мислителів, як Фалес, Піфагор, Евклід, Архімед, Ератосфен, Аполлоній Перзький, означають не лише видатних математиків – вони уособлюють цілі концепції та школи мислення. Саме в Греції сформувалося уявлення про математику як про теоретичну науку, що вимагає доведень, а не зводиться до прикладних обчислень. Евклід у своїх «Началах» заклав систему аксіоматичного методу, яка стала основою всієї подальшої математики. Архімед розробив методи, що передбачали появу інтегрального числення.

[16] Досить часто цей епізод пов'язують з ім'ям Піфагора, а не Фалеса.

[17] Виготовлений близько 625 року до н. е. На вцілілій частині посудини зображені бик, змія, заєць або маленький собака, великий собака, скорпіон, дельфін та передня частина пантери чи лева. На думку Джона Барнса, ці фігури символізують сузір'я: Телець, Гідра (змія), Заєць, Великий або Малий Пес, Скорпіон, Дельфін і Лев. Проте їхнє розташування не відповідає порядку появи сузір'їв на небі. Ймовірно, зображення було розміщено відповідно до сезонів, у які ті чи інші сузір'я видно найкраще. Так, бик асоціюється з осінню, змія, заєць і собака – із зимою, друга собака та скорпіон позначають весну, а дельфін, скорпіон і, можливо, втрачені фігури – літо.

Грецька традиція не лише систематизувала знання, а й тісно поєднала їх із філософією: платонівська ідея про математику як відображення вічних істин вплинула на всю інтелектуальну історію людства. Ця культура імен та ідей стала попередницею сучасної науки, де значення має не лише результат, а й його автор, логіка доведення та сам метод пізнання. Саме тому грецька математика – не просто історичний етап, а жива частина інтелектуальної спадщини людства.

Короткий огляд

У давніх цивілізаціях Сходу – Єгипті та Месопотамії – накопичилося багато математичних знань. Там знали про площі фігур, об'єми тіл, розв'язували задачі, пов'язані з торгівлею, будівництвом та астрономією. Проте цим знанням бракувало однієї важливої риси – строгості доведень. Переліки правил і рецептів, навіть якщо вони були правильними й корисними, не перетворювалися на систематизовану дедуктивну науку. Прогрес ішов повільно, а здобуті відомості передавалися з покоління в покоління радше як набір практичних інструкцій, ніж як наукова теорія.

Приблизно так само справи виглядали і в Греції аж до VIII ст. до н. е. Але потім відбулася різка зміна: з'являється математика нового типу, побудована не лише на емпіричних даних, а й на строгій логіці. У центрі уваги опиняються не просто обчислення, а доведення, що виводяться на основі аксіом. Це стає початком наукового методу, який визначить розвиток математики та природничих наук на тисячоліття вперед.

Причини цього перевороту й досі залишаються предметом дискусій. Очевидно, що він не був зумовлений внутрішніми потребами самої математики – в інших цивілізаціях накопичувалися не менш складні знання, але революції не сталося. Зміни також не пояснюються й технічними чинниками: рівень інженерії та ремесел у Греції не перевищував єгипетського чи вавилонського. У такому разі, що ж стало каталізатором?

Самі греки пояснювали свій успіх особливостями державного устрою. Аристотель вважав, що демократія найкраще сприяє розвитку потенціалу громадян, даючи кожному можливість розкрити свої здібності. На відміну від жорстко централізованих держав Сходу, грецькі поліси передбачали активну участь громадян у житті суспільства, дискусії та суперечки. Саме в таких умовах могла виникнути ідея, що істина потребує аргументації й доведень, а не лише посилання на традицію чи авторитет.

Ще одним чинником, на який вказував Аристотель, був дозвілля. У античному світі наукою займалися не професіонали, а люди, що мали вільний час для роздумів. Рабовласницьке суспільство надавало громадянам можливість займатися абстрактними питаннями, не пов'язаними з повсякденними турботами. У цьому середовищі й народилася математика як галузь знання, вільна від утилітарних цілей і спрямована на пошуки універсальної істини.

Таким чином, грецька революція в науці стала не результатом необхідності, а наслідком особливих умов суспільного життя. Саме у свободі дискусій, у можливості ставити запитання та вимагати доведень народилася математика, яка згодом лягла в основу всієї західної науки.

Розвиток давньогрецької математики можна поділити на кілька етапів, кожен із яких тісно пов’язаний із культурними та філософськими процесами свого часу:

Архаїчний період (VII–V ст. до н. е.) починається з появою перших математичних шкіл, де знання передавалися не лише у прикладній формі, як у Єгипті чи Месопотамії, але й починали осмислюватися теоретично. Головну роль тут відіграли піфагорійці (VI ст. до н. е.), які розглядали числа як основу світобудови. Їхня знаменита ідея гармонії чисел знайшла відображення в музиці, архітектурі та філософії. У цей час з’явилися перші доведення математичних теорем (наприклад, знаменита теорема Піфагора), а також усвідомлення ірраціональності чисел, що стало викликом для традиційної концепції чисел як цілих і дробових величин.

Класичний період (V–IV ст. до н. е.), у якому відбувається перехід від емпірики до логіки, пов’язаний із розквітом афінської філософії та її впливом на розвиток математики. Головними фігурами стали Зенон Елейський, який вводить метод логічних парадоксів, та Платон, що розглядав математику як ідеальну, незалежну від реальності науку. В його Академії математика стає основою філософської освіти: на вході висів напис «Хай не ввійде сюди той, хто не знає геометрії». У цей період математика перестає бути просто інструментом обчислень і перетворюється на систему абстрактних понять та логічних міркувань.

Еллініcтичний період (IV–II ст. до н. е.) головним чином характеризується систематизацією та науковим методом. Після завоювань Александра Македонського культурні центри перемістилися до еллініcтичних міст, особливо до Александрії, де була заснована знаменита бібліотека та Мусейон. Тут працював Евклід, автор «Начал» – першої систематичної математичної праці, в якій закладено основи аксіоматичного методу. Архімед досліджує питання геометрії, механіки, гідростатики, фактично передбачаючи ідеї математичного аналізу. Ератосфен обчислює окружність Землі, використовуючи геометричні методи. Це час становлення математики як строгої науки з доведеннями, які стали основою європейської традиції.



Аїд викрадає Персефону (Грецька Македонія, близько 300 р. до н. е.) – привертають увагу колеса, зображені еліпсами (фото з сайта Вікіпедія).

Пізньоеллініcтичний і римський період (II ст. до н. е. – V ст. н. е.) знаменують занепад античної математики та передачу культурної спадщини європейській цивілізації. Після римського завоювання Греції (146 р. до н. е.) математика втрачає свою динаміку

розвитку. Вона залишається важливою частиною освіти, але акцент зміщується з відкриттів на коментарі та збереження спадщини. У цей час Клавдій Птолемей створює астрономо-математичний твір «Альмагест», а Діофант Александрійський розробляє основи алгебри. У IV–V століттях н. е. неоплатоніки (наприклад, Прокл) займаються збереженням і тлумаченням класичних математичних знань.

Математика в міфах Давньої Греції

Грецька міфологія на перший погляд видається царством чудес і чарів, далеким від строгих законів науки. Проте уважніше придивившись, можна побачити, що в ній приховані образи й ідеї, тісно пов'язані з математикою, геометрією та астрономією. Від богів, наділених знанням чисел, до символів упорядкованого світу – античні міфи відбивають прагнення греків осмислити реальність через логіку та розрахунок.



У давньогрецькій традиції винахід системи числення приписували богові Гермесу[18]. Як покровитель торгівлі, хитрості й знань, він був не лише посередником між богами та людьми, а й символом раціонального мислення. Міф про Дедала, великого зодчого й винахідника, також тісно пов'язаний із наукою. За свідченням Плінія, саме Дедал і його небіж Талос винайшли пилку, висок, циркуль та інші геометричні інструменти, без яких неможливі ані архітектура, ані інженерна справа. У цьому міфі проступає думка: майстерність вимагає не лише ремісничих навичок, а й точних математичних знань. Символічно, що саме Дедал був будівничим Лабіринту Мінотавра – структури, у якій виявляється принцип симетрії та складності, що згодом стане предметом математичних досліджень.





У циклі міфів про Тесея – переможця Мінотавра – теж знаходимо «математичний слід». Так, Ефра, донька царя Трезена Піттея й мати Тесея, володіла рідкісним для свого часу даром – умінням навчати арифметики. Легенда розповідає, що тоді, коли в грецькій системі числення ще не було ні нуля, ні позиційного принципу, вона вчила дітей царських родів основ рахунку й обчислень. Цей міф свідчить: у грецькому суспільстві існувало усвідомлення важливості математичної освіти, хай навіть на рівні переказів.



Міф, що зберігся лише в уривках давніх оповідей, відбиває не лише шану до матері героя, а й глибоке розуміння еллінами ролі математики в житті суспільства. Для греків числа були не просто інструментом – вони вважалися частиною космічного

[18] Перша, найбільш знаменита серія грецьких марок 1860р. зображувала голову Гермеса.

порядку, втіленням божественної гармонії. Недарма Піфагор і його послідовники проголошували: «усе є число», а платонівські філософи бачили в математиці основу істинного знання.

Зображуючи Ефру не лише матір'ю великого воїна, а й наставницею в науці чисел, давні греки неначе натякали: навіть герої завдячують своїм перемогам не тільки силі, а й розуму. Великі цивілізації постають не на міфах про чудеса, а на точних розрахунках, законах логіки й умінні осягати устрій світу. А якщо уявити, що образ Ефри справді відображає традицію жіночої освіти в арифметиці, то це може свідчити про те, що передача математичних знань не була виключно чоловічим заняттям.

Одним із ключових сюжетів міфології є поява порядку з первісного Хаосу. За Гесіодом, спершу існував безлад, але згодом у світі запанував Космос – гармонійна, структурована система. Цей образ перегукується з грецьким науковим світоглядом, у якому математика стає способом опису універсального порядку речей. Уявлення про Космос як про впорядковану реальність вплинуло на розвиток філософії та науки, зокрема геометрії, астрономії й фізики.



Греки пов'язували небесні явища з людською історією, надаючи сузір'ям імена міфологічних героїв. Це свідчить про прагнення впорядкувати небесну сферу, віднайти в ній закономірності й закони. Особливо показовим є образ Геліоса, який мчить небом на своїй колісниці. Цей мотив уособлює циклічність руху Сонця й став основою астрономічних уявлень про добове та річне обертання небесних тіл.



Ще один міфологічний образ, пов'язаний із природознавством, – Зевс-громовержець. У його владі – керувати блискавками й бурями, що символічно нагадує про контроль над природними законами. Уже в античності філософи прагнули дати раціональне пояснення громові та блискавкам, і це згодом привело до розвитку метеорології та фізики електрики. Таким чином, міфологічні мотиви ставали прообразами майбутніх наукових відкриттів.



Сфінкс, що загадує подорожнім питання про віки людського життя («вранці – на чотирьох ногах, удень – на двох, увечері – на трьох»), є яскравим прикладом того, як грецька міфологія сприяла розвитку логічного мислення. Розгадування загадок вимагало не лише знань, а й уміння міркувати – риса, що згодом стала основою грецької філософії та формальної логіки.

Отже, математика в давньогрецькій міфології – явище не випадкове. Образи богів, героїв і природних явищ уміщують у собі ідеї порядку, симетрії, руху й логіки. Ці міфологічні мотиви не лише передували виникненню грецької науки, а й допомогли сформувати

уявлення про світ, які стали підґрунтям європейської математичної й філософської традиції.

Грецька нумерація

Приблизно до V ст. до н. е. в Афінах користувалися акрофонічною (аттичною) системою запису чисел. Цей метод ґрунтувався на адитивному принципі та базувався на перших літерах слів, що позначали числа. Він нагадував римську систему числення. Основними його знаками були:

Ι (або просто риска) – 1

Π (від πέντε, «п’ять») – 5

Δ (від δέκα, «десять») – 10

Η (від ἑκατόν, «сто») – 100

Χ (від χίλιοι, «тисяча») – 1 000

Μ (від μύριοι, «десять тисяч») – 10 000

Число 3 574, наприклад, у такій нумерації могло виглядати так: ΧΧΧΗΗΗΗΔΔΔΠΠΙΙΙΙ. Система була не дуже зручною, тому з часом її замінила алфавітна.

Вона ґрунтувалася на 24 буквах грецького алфавіту + 3 додаткових знаках:

Ϛ (стігма) – 6

Ϙ (коппа) – 90

Ϡ (сампі) – 900

Перші 9 букв позначали одиниці (α = 1, β = 2, γ = 3 ... θ = 9), наступні 9 – десятки (ι = 10, κ = 20 ... ρ = 100), а останні 9 – сотні (σ = 200, τ = 300 ... ϡ = 900). Числа від 1 до 999 записували комбінацією цих букв. Щоб відрізняти числа від звичайного тексту, над літерами ставили спеціальний знак (ʹ) – так звану «числову риску». Наприклад, число 365 записувалося так: τξεʹ (τ = 300, ξ = 60, ε = 5).

Для тисяч застосовували той самий принцип, але з префіксом Μ або з підрядковим знаком (α͵ = 1 000, β͵ = 2 000 тощо).

Грецька система нумерації не була позиційною (як, наприклад, індійсько-арабська), тому додавання й множення в ній виконувалися досить громіздко. Проте вона активно використовувалася в математиці, астрономії та бухгалтерії аж до Візантійського періоду. Зараз у Греції та на Кіпрі використовуються елементи цієї системи для запису порядкових чисельників.

Математика архаїчного періоду

Архаїчний період в історії Греції (VIII–VI ст. до н. е.) був часом поступового становлення грецької математики. На відміну від єгиптян і вавилонян, які використовували математику головно для практичних потреб, греки почали перетворювати її на абстрактну науку, засновану на логічних міркуваннях. Водночас від

цього періоду до нас дійшли лише уривчасті свідчення, тож про розвиток математики судити можна лише за непрямими даними.

Основна частина знань про математику того часу відновлена завдяки пізнішим авторам (V–IV ст. до н. е.), таким як Платон і Аристотель, які згадували про ранні досягнення, а також коментаторам елліністичної та римської епох (Прокл, Евтокій, Симплікій), що переказували чи цитували втрачені твори. Додатковими джерелами є фрагменти папірусів і написи, знайдені під час археологічних розкопок.

На початкових етапах розвитку грецька математика майже не відрізнялася від знань, нагромаджених у Єгипті та Вавилоні. Її головним завданням було розв'язання практичних питань: вимірювання земельних ділянок (геометрія в буквальному сенсі – «землемірство»), обчислення об'ємів, площ і пропорцій у будівництві, а також торгівельні операції й облік.

Знання передавалися у вигляді практичних правил і приписів, що застосовувалися в ремеслі, будівництві й адміністративній діяльності. Доведення як такі ще були відсутні, а математичні методи не виходили за межі конкретних завдань. Проте вже у VII–VI ст. до н. е. починається систематизація знань – важливий крок до народження математичної науки.



У цей час з'являються перші спроби обґрунтування математичних тверджень. Перші дослідники почали осмислювати властивості фігур і чисел, розробляти символіку та здійснювати логічні доведення. Однією з таких постатей була Полігноті (VII–VI ст. до н. е.), про яку згадує історик Ловон Аргіос. Вона була ученицею та співробітницею Талоса, відомого винахідника геометричних інструментів. Сучасники, зокрема Вітрувій, стверджували, що Полігноті зробила значний внесок у символізацію геометрії та алгебри, запровадивши грецьку алфавітну систему позначення чисел, яка частково використовується й нині. Одним із її головних досягнень стало доведення твердження «ΕΝ ΚΥΚΛΩ Η ΕΝ ΤΩ ΗΜΙΚΥΚΛΙΩ ΓΩΝΙΑ ΟΡΘΗ ΕΣΤΙΝ», що сучасною мовою перекладається як: «вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим».

Одним із найвидатніших інженерних досягнень архаїчного періоду став Самоський тунель, відомий також як тунель Евпаліна, довжиною 1036 метрів. Його спорудили у VI ст. до н. е. на острові Самос, що в Егейському морі. Призначенням тунелю було забезпечення міста Піфагорея водою з джерела, яке знаходилося за іншим боком гірського хребта (фото з сайту Вікіпедія).



Будівництво велося одночасно з двох боків гори, що вимагало виняткових математичних і інженерних знань. Головний інженер проєкту Евпалін застосував новаторські для того часу розробки в галузі геометрії та вимірювань (ще за кілька століть до створення «Начал» Евкліда, де вони були систематизовані). Оскільки навіть незначна похибка могла призвести до «розходження» двох ділянок проходки, Евпалін запропонував змінити напрямки обох галерей на певній відстані до передбачуваної «точки зустрічі».



Схема горизонтального перерізу тунелю

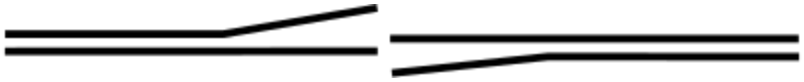


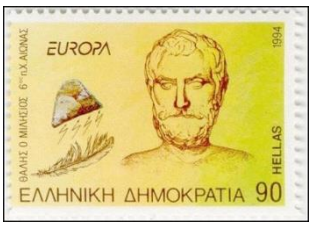
Схема вертикального перерізу тунелю

Точність вимірювань була вражаючою: сучасні дослідження показують, що вертикальне відхилення становить лише близько 40 см.

Геродот у своїй «Історії» відзначив цей тунель серед великих інженерних чудес давнини: «…скрізний тунель у горі заввишки 150 оргий, що починається біля її підніжжя й має виходи з обох боків. Довжина тунелю – 7 стадій, а висота і ширина – по 8 футів. Під цим тунелем по всій його довжині прокопано канал глибиною у 20 лікоть і шириною у 3 фути, яким у місто по трубах проведено воду з багатого джерела. Будівничим цього водогону був Евпалін, син Навстрофа, мегарець».

Згодом споруда була забута й залишалася невідомою аж до 1882 року, коли археологи, керуючись описом Геродота, знову відкрили її та підтвердили точність розрахунків давньогрецьких інженерів.

VI ст. до н. е. стало часом формування перших натурфілософських шкіл – іонійської та піфагорійської. Трохи пізніше виникли вчення Парменіда, засновника елейської школи, Геракліта з Ефеса та Демокріта з Абдер.

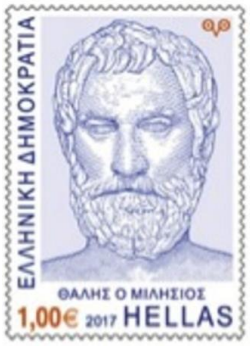


Іонійська школа натурфілософії, що постала у VI ст. до н. е. в містах Малої Азії, поклала початок грецькій науці. Її представники прагнули пояснити будову світу, виходячи з єдиного матеріального начала, і тим самим заклали основи раціонального мислення в європейській традиції. Засновником цієї школи вважається Фалес Мілетський, чиї ідеї справили значний вплив на подальші філософські й наукові погляди.

Фалес Мілетський і іонійська школа

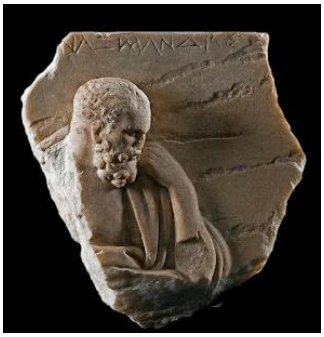
Учень Аристотеля Евдем називав Фалеса першим астрономом, римський письменник і вчений Пліній Старший – першим фізиком, а карфагенеянин Апулей – першим геометром. У своїх працях він писав: «Фалес Мілетський – один із знаменитих семи мудреців і, безсумнівно, найвидатніший серед них. Адже саме він був у греків першим винахідником геометрії, найспритнішим дослідником природи та найобізнанішим спостерігачем небесних світил. Накресливши всього кілька маленьких ліній, він зробив

великі відкриття. Він вивчав зміну пір року, пориви вітру, рух планет, гуркіт блискавки, блукання зірок по їх колах, щорічний рух Сонця, а також Місяць – як він росте після народження, як убуває з віком і чому зникає під час затемнення».



Фалес, що жив у Мілеті близько 624–546 рр. до н. е., вважається першою значущою постаттю в історії грецької філософії. Про нього відомо порівняно мало, проте його ідеї виявилися надзвичайно далекоглядними. Він стверджував, що вода є первісною основою всього сущого (архе), з якої виникли всі речі. Це вчення стало першою спробою пояснити різноманіття світу через єдиний принцип, а не через міфологічні уявлення.

Фалес також займався математикою та астрономією. За свідченнями Геродота та Ксенофана, він передбачив сонячне затемнення 585 року до н. е., що сталося під час битви між лідійцями та мідянами при Галисі. Це явище настільки налякало воюючі сторони, що вони поспішили укласти мир. Дуже цікаве питання: яким чином Фалес зміг передбачити затемнення? Адже в його часи закони руху небесних тіл ще не були відомі. Чи зробив він це на основі власних спостережень? Проте для точного прогнозу потрібен досвід багатьох поколінь, а в Греції до Фалеса подібних попередників не було. Це свідчить, що, ймовірно, він був знайомий із астрономічними знаннями Сходу.



Учні Фалеса, серед яких був Анаксимандр, продовжили розвиток натурфілософії. Анаксимандр запропонував концепцію апейрона – безкінечного й невизначеного початку, з якого походить усе існуюче. Важливим досягненням цієї школи стало одне з перших наукових уявлень про форму Землі: Анаксимандр висунув гіпотезу, що Земля має форму циліндра і знаходиться в центрі Всесвіту. Крім того, йому приписують створення першої географічної карти та введення сонячного годинника (гномона), що свідчить про високий рівень наукового мислення серед іонійців.

Іонійські філософи приділяли особливу увагу астрономії та математиці. Вони першими серед еллінів почали систематично вивчати геометрію, про що свідчать пізніші повідомлення, наприклад, Прокла (V ст. н. е.), який посилався на праці Евдема Родоського, учня Аристотеля.

Подорожі Фалеса відіграли важливу роль у формуванні математики як строгої науки. Він ознайомився з науковими досягненнями Єгипту та Вавилону, здобувши від них цінні знання. Фалес зіткнувся з різними підходами до обчислення площі кола – $3r^2$ і $(8d/9)^2$. Це змусило його проникливий розум замислитися: хто правий, а хто помиляється? Чи можна довіряти знанням, переданим традицією, чи потрібно шукати спосіб їх незалежної перевірки? Чи взагалі можливо придумати метод, який покаже, яке знання правильне, а яке – хибне? Як відрізнити точні знання від наближених чи помилкових? Відповідь проста: за допомогою логіки та доведень. Саме тому Фалес почав доводити навіть найочевидніші факти, наприклад, ділення кола діаметром на дві рівні частини.



Антоніо Канова, «Уранія, муза астрономії, відкриває Фалесу таємниці небес», 1798–1799 рр.

Так зародилася математика як строга наука. Фалес не лише сформулював, а й (за свідченням Прокла) довів кілька важливих теорем, зокрема про рівність вертикальних кутів та кутів при основі рівнобедреного трикутника. Більше того, ймовірно, він вивів теорему про рівність двох трикутників за однією стороною та двома прилеглими до неї кутами. Ця теорема стала основою методу, який Фалес застосовував для визначення відстаней до кораблів у морі.



На жаль, самі доведення Фалеса до нас не дійшли. Проте можна припустити, що він широко використовував перегинання та накладання фігур, про що свідчать слова Прокла: «Іноді він розглядав питання більш загально, іноді – спираючись на наочність». Цей метод став передвісником майбутніх строгих математичних доведень, які згодом лягли в основу всієї геометрії.

Вчені Іонійської школи займалися не лише абстрактними теоріями, а й цілком практичними завданнями. Наприклад, історично перша відома монополія була описана Аристотелем у розповіді про Фалеса Мілетського. «Коли його дорікали бідністю, стверджуючи, що заняття філософією не приносить жодної вигоди, – розповідають, – він, передбачивши на основі астрономічних спостережень багатий урожай оливок, ще до кінця зими роздав у заставу наявну у нього невелику суму грошей усім власникам маслобійень у Мілеті та на Хіосі, уклавши з ними контракти дешево,

адже ніхто не складав йому конкуренції. Коли настав час збору оливок і одночасно багатьом знадобилися маслобійні, він, віддаючи їх на відкуп на вигідних для себе умовах і зібравши значну суму грошей, довів, що філософи за бажання можуть легко розбагатіти, але саме це не є предметом їхніх прагнень».



Зображення в Нюрнберзькій хроніці, 1493 р.

Інші джерела, навпаки, зображують Фалеса як розсіяного людину, зануреного у роздуми й не помічаючого навколишній світ. Особливо популярною стала розповідь про філософа, який, спостерігаючи за зірками, впав у колодязь. Вперше вона згадується в діалозі Платона «Теєтет» (IV ст. до н. е.): «На прикладі Фалеса, що спостерігав за зірками, це добре видно, Феодоре! Одного разу, заглянувши в небо, він упав у колодязь, а фракійська служниця, прегарна та благопристойна, як розповідають, сміялася з нього: «Бажає знати, що відбувається на небі, а не помічає, що у нього перед носом і під ногами». Ця насмішка стосується всіх, хто поринає у філософствування. Така людина не обізнана ні про свого ближнього, ні про сусіда, не тільки не знає, що робить, а навіть не усвідомлює, хто він – людина чи якась тварина. І тим часом предмет його пошуків – питання про те, що таке людина і що властиво її природі».



Ілюстрація XVIII століття до басні Жана де Лафонтена «Астролог, що впав у колодязь»

Пізніше цей сюжет переказав Діоген Лаертський, і він увійшов до збірки «Басні Езопа». У Новий час історія отримала нову інтерпретацію: її використовували для критики астрологів і схоластів, показуючи їх відриваними від реального життя. Зокрема, басня надихнула французького письменника Жана де Лафонтена, який включив її до однієї зі своїх сатиричних басень.

Навколо імені Фалеса здавна виникло чимало легенд. Найвідоміша серед них — оповідь про сім мудреців.



Розповідають, що одного разу бог вогню й ковальства Гефест, майстерний ремісник, викував золотий триножник як весільний дар герою Пелопу. Після смерті Пелопа, під час його похорону, відбулися змагання, які згодом стали початком Олімпійських ігор, а сам триножник дістався спартанському цареві Менелаю.



Згодом, разом із прекрасною Єленою, дружиною Менелая, триножник був викрадений троянським царевичем Парісом — і це, як відомо, стало однією з причин Троянської війни. Та на шляху до Трої Єлена кинула його в море.

Минуло багато років, війна закінчилася. Одного разу мешканці острова Кос, що лежить біля берегів Малої Азії, купили в рибалок їхній улов і знайшли серед риби той самий золотий триножник. Між рибалками та купцями спалахнула суперечка. Не дійшовши згоди, вони вирушили до Мілета, своєї метрополії, сподіваючись на справедливий суд. Але мілетяни, побачивши рідкісну коштовність, вирішили, що вона має належати саме їм, і розпочали війну з Косом. Криваві битви тривали довго, і коли обидві сторони знесилилися, вони звернулися по пораду до оракула.

Оракул звелів віддати триножник наймудрішому чоловікові. І мілетяни, і косійці одностайно визнали таким філософа Фалеса — мандрівника, купця й найшанованішого громадянина Мілета. Так суперечку було врегульовано.

Та Фалес не прийняв дарунка, вважаючи, що більш гідним є афінський законодавець Солон, і відіслав триножник йому. Але історія повторилася: Солон також відмовився й передав його далі. Так триножник переходив із рук у руки — від Солона до коринфського тирана Періандра, потім до Піттака з Мітілени, Клеобула з Родоса, спартанця Хілóна й Біанта з Прієни. Нарешті він знову опинився у Фалеса. Тоді філософ вирішив, що ніхто зі смертних не є достойним цього дару, і присвятив триножник Аполлону в Дідімах.

Цікаво, що легенда починається з міфічної постаті — бога Гефеста, а завершується іменами історичних діячів VII–VI століть до н. е. У різних версіях оповіді згадуються різні мудреці, тож їхнє число інколи перевищує сім — іноді до цього переліку додають навіть Піфагора. Але головне у легенді не це. Давні греки не віддавали таких почестей тиранам, воєначальникам чи багатіям. Найгіднішими вони вважали саме мудреців, і навіть серед них Фалес займав особливе місце. Недарма Плутарх писав: «Взагалі, здається, Фалес був тоді єдиним ученим, який у своїх дослідженнях виходив за межі практичних потреб, тоді як усі інші здобули ім’я вчених завдяки своєму мистецтву в державних справах».

Піфагор і його школа



Якщо засновниками математичної науки справедливо вважати іонійців, то поширення й популяризація її в Греції стали заслугою піфагорійців.

Піфагор залишається однією з найзагадковіших постатей давнини. Його ідеї справили величезний вплив на розвиток математики, філософії та науки, однак багато аспектів його життя оповиті легендами. Часто важко відокремити історичний факт від домислів. Достеменно невідомо навіть те, чи було «Піфагор» справжнім ім'ям цього філософа й математика. Існує версія, що ім'я Πυθαγόρας (Піфагор) походить від двох грецьких слів: Πυθία (Піфія) — жриця Дельфійського оракула, через яку, за переказами, бог Аполлон виголошував свої пророцтва, та ἀγορεύω (агорево) — «говорити», «проголошувати». Відтак ім'я «Піфагор» можна витлумачити як «той, хто проголошує (істину) від імені Піфії». Це могло вказувати на його зв'язок із оракулами чи з божественним знанням. Не виключено, що це був почесний титул, а не особисте ім'я.



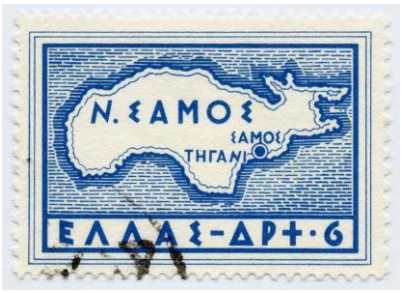
Про виняткову популярність Піфагора й його вчення в античній Елладі свідчать і непрямі докази. Так, у 430–420 роках до н. е. в Абдерах карбували монети із зображенням філософа та написом «ΠΥΘΑΓΟΡΗΕ». Цей випадок був безпрецедентним для того часу: він являє собою перший відомий портрет на монеті й, можливо, навіть перший підписаний портрет в історії.



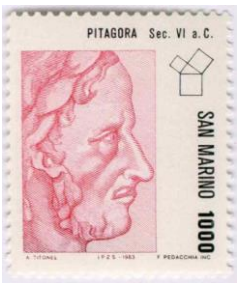
Зображення Піфагора, Шартрський собор, 1194-1260 рр. (фото з сайту Вікіпедія).

Безсумнівно, Піфагор народився близько 570 року до н. е. на острові Самос. За одними джерелами, його батько був купцем, за іншими — різьбярем по дорогоцінному камінню на ім'я Мнесарх, який, за словами Апулея, «уславився серед майстрів мистецтвом

вирізати гемми, але здобув радше славу, ніж багатство». Історики не можуть з упевненістю відтворити всі подробиці раннього життя Піфагора, проте вважається, що він здобув добре освіту, вивчаючи філософію, музику та математику.



Є легенда, що в юності Піфагор відвідав уже літнього Фалеса. Той поділився з ним своїми знаннями й порадив вирушити до Єгипту, де геометрія була розвинена на надзвичайно високому рівні. Піфагор прислухався до цієї поради, і єгипетська наука справила значний вплив на його подальшу математичну діяльність. Діодор[19] писав: «Каллімах[20] розповідає про Піфагора, що він частково винайшов, а частково перший привіз із Єгипту до Греції геометричні задачі, а саме в тому місці, де він каже: це відкрив фрігієць Ейфорб (Піфагор), який показав людям різносторонні трикутники й кола та навчив утримуватися від м'ясної їжі». Згодом Піфагор, імовірно, потрапив до Вавилона, де ознайомився з астрономією та числовими системами. Деякі джерела стверджують, що він відвідав також Індію й Персію, звідки запозичив ідеї про переселення душ і таємні знання чисел.



Втім, не лише єгипетські жерці вплинули на формування його світогляду. Велику роль у його освіті відіграла Фемістоклея — видатна жінка-математик VI століття до н. е. Вона викладала математику всім, хто приходив до Дельфійського оракула, а також брала участь в оздобленні вівтаря Аполлона геометричними формами. За переказом, саме Фемістоклея ознайомила Піфагора з основними принципами алгебри й геометрії, а також передала йому значну частину своїх моральних учень.





Піфагор глибоко захоплювався знаннями та мудрістю Фемістоклеї, що спонукало його приймати до своєї школи жінок нарівні з чоловіками — рідкісний випадок для античного світу.

[19] Діодор Сицилійський — давньогрецький історик I ст. до н. е., автор великої «Історичної бібліотеки», що охоплювала події від міфічних часів до його сучасності.

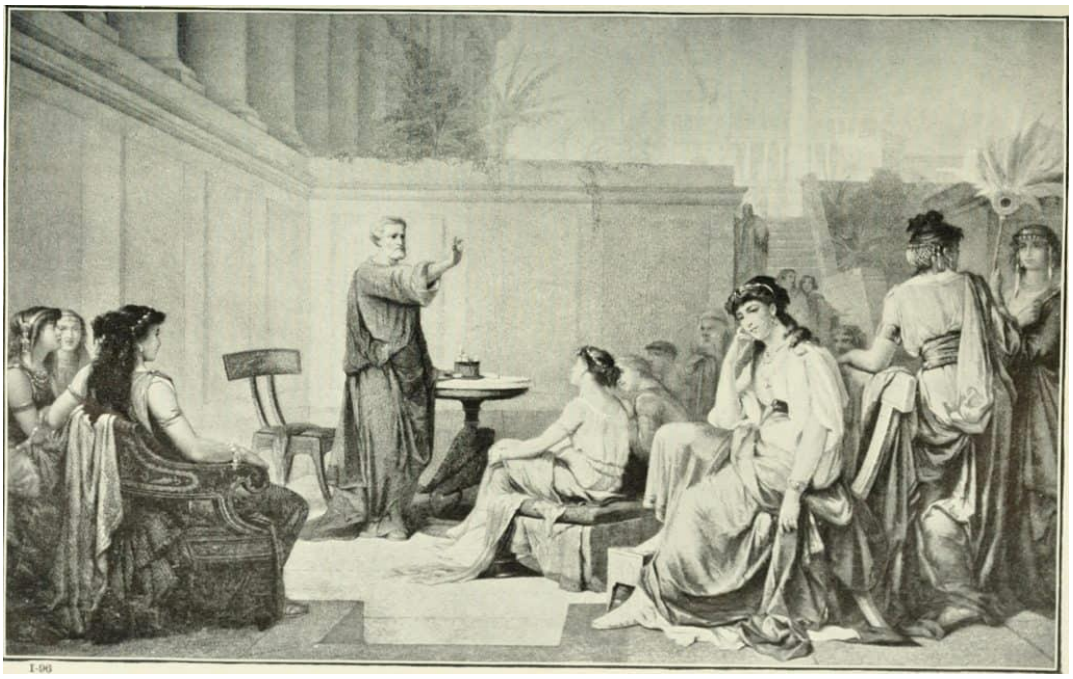
[20] Каллімах — давньогрецький поет і вчений елліністичної доби (III ст. до н. е.), знаний своїми ерудованими творами та інтересом до історичних і наукових сюжетів.

Повернувшись із мандрів, Піфагор деякий час прожив на Самосі, проте наприкінці VI століття до н. е. був змушений залишити острів через політичні суперечності[21]. Він оселився в місті Кротон у Південній Італії.



Феано

У Кротоні Піфагор познайомився з Феано[22], яка походила з роду туріанців Нижньої Італії. Феано вважається найвідомішою жінкою-астрономом і космологом античності. Імовірно, саме вона сформулювала теорію «золотого перетину» та концепцію «гармонії сфер». Коли Піфагор прибув до Кротона, Феано вже була знаною математикинею й астрономкою. Їхня зустріч відбулася під час виступу філософа в храмі Гери перед жінками-містянками.



Піфагор виступає перед жінками, гравюра невідомого автора, 1913 р.

[21] У той час островом правив тиран Полікрат (бл. 538–522 рр. до н. е.). Його режим був жорстким і викликав опір серед частини населення. Імовірно, саме з цим і пов'язують від'їзд Піфагора, який не поділяв політики тирана.

[22] Ім'я Феано мало для давніх греків особливе значення. Саме так звали жрицю Афіни в «Іліаді». Вочевидь, батьки Феано від самого початку передбачали для своєї доньки незвичайну долю.

Феано спершу була ученицею, а згодом і дружиною Піфагора, який був на 30 років старший за неї. Вона викладала астрономію та математику у школі, заснованій Піфагором у Кротоні. Ця школа була релігійно-філософським товариством, що поєднувало математичні дослідження з етичними та містичними вченнями. Серед непосвячених про школу ходило багато легенд: нібито Піфагор міг творити чудеса, розуміти мову тварин і навіть пам’ятати свої попередні життя.

У школі існували суворі правила: учні повинні були вести особливий спосіб життя та дотримуватися принципів вегетаріанства. Вони поділялися на дві групи — акузматики (слухачі) та математики (посвячені, які мали доступ до таємних знань). Піфагорійці вірили, що числа становлять основу світобудови.

Усі учні дотримувалися суворої дисципліни, яка включала обітниці мовчання та дотримання певних дієтичних правил. У школі проповідували зневагу до слави й багатства, повагу до старших, утримання від м’яса та відмову від вина. Учні давали обітницю не шкодити й не вбивати тварин, що не були небезпечними для людини. Піфагорійці вважали своє майно спільним і не брали плату за навчання тих, хто приходив до них.



Ф. Бронніков. Гімн піфагорійців сходячому сонцю, 1869 р.

Відома історія про одного з учнів Піфагора: спершу філософ платив йому за кожну засвоєну теорему, але згодом учень так захопився наукою, що сам захотів платити за навчання.

На початку у Піфагора було близько 200 учнів, проте з часом їхня кількість перевищила 2000.Школа стала впливовим центром науки й філософії, але викликала невдоволення

місцевих властей і аристократії[23]. Послідовники Піфагора зазнавали переслідувань, а сам філософ, за різними даними, або загинув під час нападу на школу, або втік і помер у вигнанні. Існує легенда, що Піфагор відмовився перетнути поле з бобами (вживання яких у їжу він забороняв) і був убитий переслідувачами.



Після смерті Піфагора його послідовників очолила Феано. Вона з великим успіхом продовжила його дослідження в галузі фізики, медицини, математики та педагогіки, а потім довірила одній зі своїх дочок — Дамо — зберігати у таємниці твори її батька. Феано сприяла поширенню вчення і праць Піфагора як у Греції, так і в Єгипті, працюючи разом із своїми дітьми, які взяли на себе керівництво піфагорійськими школами.

Тут, здається, простежується певна протирічність: з одного боку, школа була закритою, і знання з неї не мали виходити назовні, з іншого — Феано сама поширює вчення й праці Піфагора. Як це пояснити?

Одне з можливих пояснень дає переказ, згаданий у «Життєписах Піфагора», на який звернув увагу Таннері. За цим переказом, розповсюдження геометричних знань відбулося через одного з піфагорійців, який втратив доступ до коштів громади і був змушений заробляти на життя викладанням. Це, як стверджується, призвело до того, що геометрія перестала бути таємним знанням і набула широкого поширення.



Пітер Пауль Рубенс, Піфагор, який проповідує вегетаріанство, 1620 р.

[23] Піфагорійська школа об’єднувала велику кількість учнів, мала власну ієрархію та дисципліну, пропагувала етичні норми й спільне майно, що суперечило інтересам місцевих правителів і багатих родин. Ці фактори робили школу потенційно впливовою і політично небезпечною для еліт.

Ця історія пояснює, як закрита система змушена була ділитися своїми знаннями з зовнішнім світом. Уже в середині V століття до н. е. навчання стало прибутковою справою, і попит на нього зростав: у суспільстві сформувався прошарок софістів, які заробляли викладанням, а багаті родини вбачали в освіті важливу частину соціального престижу. В таких умовах окремі члени піфагорійської школи, ймовірно, почали передавати знання, щоб забезпечити власне існування.

Існує й інше можливе пояснення. Згадка про «Переказ Піфагора» як своєрідний підручник геометрії натякає на те, що з часом у школі могло скластися розділення між строго охоронюваними вченнями та тими, які можна було передавати більш вільно. Можливо, Феано поширювала саме ту частину знання, яка не вважалася строго таємною, або робила це вже після занепаду піфагорійської громади, коли суворі заборони втратили силу.

Таким чином, якщо на ранньому етапі існування школи знання справді були суворо закритими, згодом під тиском зовнішніх обставин ставлення до їхнього поширення могло змінитися. Це могло відбуватися або через економічну потребу окремих учнів, або як частина цілеспрямованої адаптації вчення до зміненої інтелектуальної атмосфери.

Після смерті Піфагора, за традицією, Феано мала вийти заміж за родича або близького друга свого чоловіка, або, принаймні, за когось дуже близького йому, щоб забезпечити власний захист, а також охорону спадщини та традицій Піфагора. Її другим чоловіком став також учень піфагорійської громади. Феано померла приблизно у V столітті до н. е. і, за переказами, була похована неподалік піфагорійської школи.

Піфагорійська школа була закритим товариством, у якому знання не записувалися, а передавалися усно від учителя до учнів. За традицією всі результати, отримані в школі, приписувалися самому Піфагору. Тому нині неможливо точно відокремити праці самого Піфагора від творів його учнів.

Піфагорійці повністю перебудували методику викладання математики. Про це писав Прокл[24]: «Піфагор перетворив цю науку на форму вільної освіти. Він вивчав її, виходячи з первинних основ, і прагнув отримувати теореми за допомогою чисто логічного мислення, без прив’язки до конкретних уявлень».









[24] Прокл — давньогрецький філософ і коментатор (V–VI ст. н. е.), відомий своїми працями з історії математики та філософії, зокрема коментарями до Евкліда, в яких він описував методи та досягнення античних математиків, зокрема Піфагора.

Одним із найважливіших математичних відкриттів піфагорійців стало розроблення теорії чисел. Вони вважали числа основою всього сущого і навіть надавали їм містичного значення. Піфагорійці досліджували властивості цілих чисел, їхню подільність, а також співвідношення між числами. Вони дійшли висновку, що музика, гармонія і навіть структура світу підпорядковані числовим закономірностям.

Багато ідей піфагорійців у галузі фізики радше належали до філософії, ніж до науки у сучасному розумінні. Піфагорійці вважали, що вся Всесвіт підпорядкована певним законам, заснованим на числових співвідношеннях і гармонії. Одним із таких відкриттів стала теорія, згідно з якою музика й звук мають математичну основу.



Гравюра на дереві, що зображує Піфагора з дзвіночками — свого роду скляною гармонікою, монохордом і (органними?) трубами в піфагорійському ладі. З «Theorica musicae» Франкіно Ґаффуріо, 1492 (1480?).

Піфагор помітив, що коли струна, натягнута на музичному інструменті, піддається вібрації, її довжина визначає висоту виданого звуку. При цьому він виявив пропорції між довжиною струни та тональністю звуку. Ця ідея стала основою теорії музичних інтервалів, де числа та пропорції відіграють ключову роль.

Займаючись вивченням гармонії, піфагорійці дійшли висновку, що якісні відмінності звуків зумовлені кількісними співвідношеннями довжин струн або флейт. Вони виявили, що якщо довжини струн перебувають у співвідношенні 1:2, 3:2 або 4:3, відповідні музичні інтервали — октава, квінта та кварта — звучать гармонійно (консонантно). У інших випадках інтервали виявляються неблагозвучними (дисонантними). Таким

чином, піфагорійці пов’язали природу музичного звучання з цілими числами та їхніми співвідношеннями.

Для них надзвичайно важливим було те, що основні гармонійні інтервали можна отримати за допомогою чисел 1, 2, 3 і 4. Це підтверджувало їхній головний принцип: «Усе є число» або «Усе впорядковано відповідно до чисел». Ці числа утворювали знамениту «тетраду» (1+2+3+4 = 10), яка відігравала важливу роль у їхній філософії.

Геометрично тетрада зображалася як «досконалий трикутник», а арифметично — як «трикутне число». За легендою, Піфагор надавав числу 10 особливого значення. Лукіан розповідав, що одного разу Піфагор попросив когось порахувати, і як тільки той промовив: «1, 2, 3, 4», філософ його перебив: «Бачиш, те, що ти називаєш чотирма, є ніщо інше, як 10, досконалий трикутник і наша клятва».

У галузі фізики піфагорійці також займалися дослідженнями в космології, стверджуючи, що планети й зорі рухаються відповідно до числових і математичних законів. Вони вважали, що Земля перебуває в центрі Всесвіту, усі небесні тіла рухаються по кругових орбітах, а їхній рух є проявом божественної гармонії.







Що стосується геометрії, то ми точно не знаємо, які геометричні твердження піфагорійці обрали як вихідні та якою була ця перша система аксіом. Відомо лише, що зміст їхньої геометрії здебільшого зводився до планіметрії прямолінійних фігур: вивчалися властивості трикутників, прямокутників, паралелограмів, порівнювалися їхні площі та інші характеристики. Піфагорійці намагалися виявити закономірності в цих фігурах і в їхніх взаємозв’язках, розвиваючи основи геометричного мислення.

Вершиною їхньої геометричної системи стало доведення знаменитої теореми Піфагора, яка до того часу в Греції була відома лише для окремих випадків. Ця теорема, що стверджує: у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів, стала наріжним каменем не лише піфагорійської геометрії, а й усієї подальшої математичної науки. Важко переоцінити значення цієї теореми, узагальнення якої й донині лежить в основі визначення всіх метричних просторів, визначаючи структуру та властивості геометричних об’єктів у сучасному розумінні.





Доведення теореми Піфагора природно привело до дослідження так званих «піфагорових трійок» – трійок цілих чисел *a, b, c*, що задовольняють рівність $a^2 + b^2 = c^2$. Римські автори приписували цю роботу деякій Фіндії, учениці Піфагора.

Піфагорійці також займалися побудовою правильних многокутників. Імовірно, вони знали три правильні тіла з п'яти[25].

Вони вірили, що світ улаштований на основі гармонійних числових співвідношень. У їхній філософії числа не лише описували природу, а й керували нею. Піфагорійці були переконані, що будь-яке відношення між величинами можна виразити за допомогою цілих чисел або їхніх відношень, тобто раціональних чисел. Однак одне з відкриттів, зроблене всередині самої школи, поставило під сумнів цю фундаментальну догму й спричинило справжню кризу світогляду.



Пам'ятник Піфагору на Самосі

Проблема виникла під час вивчення діагоналі квадрата. Якщо прийняти довжину його сторони за 1, то за теоремою Піфагора діагональ дорівнює $\sqrt{2}$. Піфагорійці намагалися подати це число як відношення двох цілих (у вигляді дробу), але доведення показало, що таке подання неможливе: $\sqrt{2}$ не можна записати у вигляді дробу з цілими чисельником і знаменником.

Це означало, що серед чисел існують такі, які не підкоряються звичним піфагорійцям законам. Їхня строга гармонійна картина світу, побудована на раціональних числах, руйнувалася: відкриття доводило, що є величини, які не можна виразити через знайомі числові співвідношення. Це ставило під загрозу всю їхню математико-філософську систему, засновану на вірі в абсолютну впорядкованість і симетрію світу.

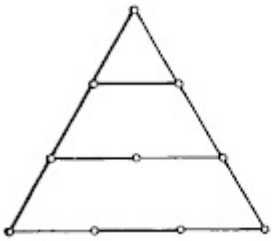
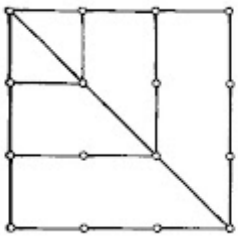
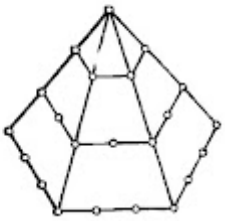
[25] Вважається, що ікосаедр і додекаедр було винайдено пізніше, Теєтетом (приблизно 417–369 р. до н. е.).

Розголошення цього відкриття вважалося небезпечним і руйнівним. У школі Піфагора діяли суворі заборони на поширення знань поза колом посвячених. Будь-які відкриття, що загрожували встановленому порядку, оголошувалися таємницею, розкриття якої могло мати тяжкі наслідки.

За переказом, першим, хто довів існування ірраціональних чисел, був один із піфагорійців – Гіппас із Метапонта. За однією з версій, він порушив заборону й розповів про відкриття стороннім. Легенда свідчить, що за це його засудили на смерть і втопили в морі – як символічну кару за розкриття страшної математичної істини, яка суперечила піфагорейському вченню.

Ця історія підкреслює, наскільки серйозно піфагорійці ставилися до своєї філософії та наскільки небезпечним для їхнього світогляду виявилося відкриття ірраціональності. Можливо, це лише міф, проте він відображає реальну інтелектуальну кризу, яку пережила школа Піфагора.

(Загалом історія піфагорійців сповнена драматичних епізодів. Так, наприклад, розповідають, що після знищення піфагорейської школи демократами Кротона учениця Піфагора Тіміка втекла до Сіракуз. Тамтешній тиран Діонісій вимагав від неї за величезну винагороду відкрити секрети піфагорійців. Тіміка категорично відмовилася, відкусила собі язик і виплюнула його в обличчя Діонісію.)

Піфагорієць Архіт писав: «Арифметика, на мою думку, серед інших наук особливо вирізняється досконалістю знання; і навіть від геометрії вона [досконаліша, оскільки] ясніше, ніж геометрія, розглядає будь-який предмет».

Піфагорійці вивчали так звані фігурні числа – числові послідовності, які можна наочно зобразити у вигляді геометричних фігур. Наприклад, «трикутні» числа 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, …, загальна формула для яких має вигляд $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$; «квадратні» числа 1, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, …, що будуються за формулою $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Слово «квадрат» для позначення числа n^2 – це спадщина піфагорійської термінології, адже числа такого типу можна уявити у вигляді квадратів.

«П’ятикутні» числа 1, $1 + 4 = 5$, $1 + 4 + 7 = 12$, …, виражаються загальною формулою $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = n(3n - 1)/2$.

Крім того, піфагорійці досліджували «кубічні» числа (1, 8, 27, …), що дало нам сучасне поняття «куба» числа. Вони також визначили «пірамідальні» числа, які є сумами трикутних чисел. Ці дослідження заклали основи піфагорійської теорії чисел, що стала важливим етапом у розвитку математики.

Так, наприклад, Птолемаїс (VI ст. до н. е.) довела переставність (комутативність) множення чисел[26]. Піфагорійці приділяли особливу увагу вивченню властивостей чисел і їхній класифікації. Вони ввели поняття парних і непарних чисел, заклали підвалини теорії подільності, а також досліджували «досконалі» числа (такі, що дорівнюють сумі власних дільників, наприклад, 6 = 1+2+3) і «дружні» числа (пари чисел, у яких сума дільників кожного дорівнює іншому числу, наприклад, 220 і 284).

Створена ними теорія згодом була відтворена Евклідом у 21–34-й пропозиціях IX книги «Начал». Там вона подана вже після викладу загальної теорії подільності в VII книзі, яка, зокрема, включає й теорію подільності на 2. Очевидно, цей матеріал було включено до «Начал», щоб підкреслити повагу, яку Евклід відчував до здобутків піфагорійської школи.



Сальватор Роза, Піфагор и рибалки, 1662[27]

[26] На цей факт посилається Порфирій (неоплатонічний філософ, III ст. н. е.) у своєму коментарі до «Гармоніки» Клавдія Птолемея (Εἰς τὰ Ἁρμονικὰ Πτολεμαίου ὑπόμνημα). Зокрема, він зазначає, що серед іншого Птолемаїда довела переставність множення, сформулювавши таке твердження: «ΕΑΝ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΑΝΤΕΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΠΟΙΩΣΙ ΤΙΝΑΣ, ΟΙ ΓΕΓΟΜΕΝΟΙ ΕΞ ΑΥΤΩΝ ΙΣΟΙ ΑΛΛΗΛΟΙΣ ΕΣΟΝΤΑΙ». У перекладі: «Якщо два числа, будучи помножені одне на одне прямо і навпаки, дають певний результат, то отримані добутки будуть рівні між собою», тобто ab = ba.

[27] «Якось великий філософ і математик Піфагор ішов уздовж морського берега, розмірковуючи про числа й гармонію світу. Він побачив рибалок, які витягали сітку, повну риби. Побачивши мудреця, рибалки привіталися з ним і запросили поглянути на їхній улов. Піфагор уважно подивився на сітку й раптом сказав, що у сітці рівно 153 риби. Рибалки здивувалися: як він міг це знати, не зазирнувши в сітку й не перерахувавши здобич? Один із них, вирішивши перевірити слова філософа, запропонував порахувати рибу. Вони витягли сітку на берег і почали рахувати. На їхній подив, Піфагор мав рацію — у сітці справді виявилося рівно 153 риби! Але це було не єдине диво: поки рибалки рахували улов, жодна риба не загинула, хоча зазвичай риби швидко задихаються на суші. Рибу відпустили, і вся вона упливла, наче нічого й не сталося. Піфагор тоді пояснив рибалкам, що «Числа мають таємну силу, і той, хто знає їхні властивості, може бачити світ інакше.»

Зенон Елейський

Дослідження піфагорійців у галузі неспівмірності та класифікації ірраціональних чисел привели до усвідомлення глибоких обмежень традиційної арифметики. Їхні результати показали, що не всі величини можна виразити через співвідношення цілих чисел, і це стало серйозним викликом для піфагорійської концепції числа як основи світобудови. Ці відкриття змусили математиків переосмислити уявлення про числа, величини та їхні співвідношення.



Втім, проблема неперервності й подільності просторових величин виходила за межі суто арифметичних досліджень. Питання про те, чи можна простір або рух розглядати як нескінченно подільні величини, набуло філософського характеру. Саме тут на арену виходить Зенон Елейський, який за допомогою своїх знаменитих апорій поставив під сумнів саму можливість нескінченного поділу та руху.

Про життя Зенона (близько 490 до н. е. – близько 430 до н. е.) відомо небагато, і більшість відомостей про нього збереглася у творах Платона (діалог «Парменід»), Аристотеля та пізньоантичних авторів, зокрема Симплікія. Зенон народився в місті Елея (Південна Італія), був учнем і послідовником Парменіда [28] – філософа, який стверджував, що буття єдине, незмінне й непорушне. За свідченням Платона, Зенон написав книгу (або кілька трактатів), у яких намагався захистити вчення Парменіда від критики, використовуючи доведення «від супротивного». Саме в цьому контексті він розробив свої апорії (логічні парадокси). За деякими джерелами, Зенон був не лише філософом, а й брав участь у політичній боротьбі. Плутарх та інші автори повідомляють, що він намагався протистояти тиранії в Елеї, за що був схоплений і страчений. Легенди приписують йому мужню смерть: мовляв, навіть під тортурами він не виказав своїх соратників.

В історії науки бувають моменти, коли, здавалося б, руйнівна критика несподівано стає джерелом нового знання. Одним із таких моментів стала поява апорій Зенона, метою яких було показати неспроможність уявлень про рух, множинність і подільність. Ці парадокси торкалися ключових питань неперервності простору й часу, що робить їх особливо важливими в контексті праць Теєтета, який вивчав неспівмірні величини та розвивав розуміння ірраціональних чисел. Сучасники згадували про 40 апорій Зенона, проте до нас дійшло лише 9 — головним чином завдяки працям Аристотеля та його коментаторів. Усі апорії є прикладами доведення від супротивного: Зенон бере

[28] Парменід першим почав будувати філософію на основі логіки. Симплікій, посилаючись на Евдема Родоського, писав: «Попередники ж висловлювали свою думку без логічних доведень».

припущення, яке суперечить ученню Парменіда (наприклад, що шлях рухомого тіла нескінченно подільний або складається з окремих неподільних точок), а потім виводить із цього припущення логічне протиріччя.

Найвідоміші апорії стосуються руху:

Ахілл і черепаха. У сучасному формулюванні ця апорія звучить так: «Швидконогий Ахілл ніколи не наздожене повільну черепаху, якщо на початку руху черепаха знаходиться попереду Ахілла. Припустимо, Ахілл біжить у десять разів швидше за черепаху і відстає від неї на тисячу кроків. За той час, поки Ахілл пробіжить цю відстань, черепаха проповзе сто кроків у тому ж напрямку. Коли Ахілл пробіжить ці сто кроків, черепаха проповзе ще десять кроків, і так далі. Процес триватиме до нескінченності, і Ахілл так ніколи не наздожене черепаху». Найраніша з відомих формулювань цієї апорії міститься у «Фізиці» Аристотеля: «Другий [аргумент Зенона] називається „Ахілл“. У ньому сказано, що повільніший — коли він біжить — ніколи не буде наздогнаний швидшим. Бо перед тим, як це може статися, необхідно, щоб переслідувач прибув у те місце, звідки стартував переслідуваний; отже, необхідно, щоб повільніший завжди був трохи попереду». Як бачимо, черепаха як персонаж додана пізнішими коментаторами (Симплікієм і Фемістієм). У ранніх текстах, таких як у Аристотеля, Ахілл наздоганяє іншого бігуна. Ця апорія є парною до наступної — «Дихотомії», яка, навпаки, доводить, що рух ніколи не розпочнеться.

Дихотомія. Найраніша відома формулювання (знову ж таки, з «Фізики» Аристотеля) звучить так: «[Ідея Зенона] полягає в тому, що руху не існує, бо те, що зрушилося, повинно спершу пройти половину шляху, перш ніж дійти кінця». Сучасною мовою це можна пояснити так: «Щоб подолати шлях, потрібно спершу подолати половину шляху, щоб подолати половину — спершу половину половини, і так до нескінченності. Тому рух ніколи не почнеться».

Перша і друга апорії були спрямовані на виявлення протиріч у припущенні про можливість нескінченного поділу простору і часу. Це залишало єдину альтернативу — припустити, що простір і час складаються з неподільних елементів.

Стріла. Летюча стріла нерухома, бо в кожен момент часу вона займає незмінне положення, тобто перебуває в стані спокою; оскільки вона перебуває в спокої в кожен момент часу, вона перебуває в спокої у всі моменти часу, тобто не існує моменту часу, у якому стріла здійснює рух.

Стадіон. Нехай по стадіону рухаються по паралельних прямих рівні маси з однаковою швидкістю, але в протилежних напрямках. Нехай ряд A_1, A_2, A_3, A_4 позначає нерухомі маси, ряд B_1, B_2, B_3, B_4 — маси, що рухаються вправо, а ряд $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, $Г_4$ — маси, що рухаються вліво. Розглянемо маси A_i, B_i, $Г_i$ як неподільні. У неподільний момент часу B_i і $Г_i$ проходять неподільну частину простору. Справді, якщо б у неподільний момент часу тіло проходило більше однієї неподільної частини простору, то цей момент часу був би подільним; якщо менше — можна було б розділити неподільну частину простору. Розглянемо тепер рух неподільних B_i і $Г_i$ відносно один одного: за два неподільні моменти часу B_i пройде дві неподільні частини A_i і водночас «перераховує» чотири неподільні частини $Г_i$, тобто неподільний момент часу виявляється подільним. Ця апорія спрямована проти уявлення про міру відрізка як суму мір неподільних частин.

Стародавня Греція була суспільством, де мистецтво суперечки цінувалося не менше, ніж військова майстерність. Філософські школи вели безкінечні дискусії, спростовуючи погляди одне одного, а судові процеси вимагали не просто переконання, а логічно бездоганних аргументів. Саме в такому середовищі формувалася техніка доведення, яка пізніше лягла в основу всієї математики.

Уявлення давньогрецьких учених про доведення було дивовижно сучасним: воно повинно було складатися з ясних вихідних положень і чіткої послідовності логічних кроків, які визнавав сам співрозмовник. Жодні інтуїтивні здогадки чи правдоподібні міркування не допускалися — лише строга логіка. Цей підхід вироблявся експериментально, у суперечках і дискусіях.

Зенон збентежив філософський світ, запропонувавши парадокси, які показали внутрішні протиріччя ідеї неперервності. Він атакував як гіпотезу про нескінченне ділення простору й часу, так і припущення, що вони складаються з неподільних елементів.

Ці парадокси спричинили настільки потужний резонанс, що залишили незабутнє враження навіть на великих мислителів наступних епох. Саме через критику Зенона давньогрецькі математики уникали використання актуальної нескінченності, тобто уявлення про нескінченні множини, які існують як єдине ціле. Натомість вони працювали з потенційною нескінченністю — можливістю необмеженого продовження процесів.

Наприклад, Евклід, створюючи свою систему геометрії, ніде не говорить про нескінченну пряму, а оперує лише скінченними відрізками, які можна нескінченно продовжувати. Його знаменитий п’ятий постулат — про перетин прямих — також формулюється через можливість продовження відрізків, а не через існування нескінченної лінії.

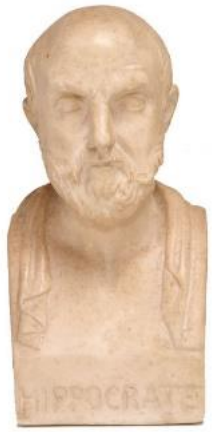
Одним із найважливіших результатів відмови від актуальної нескінченності стало виникнення методу вичерпування. Цей метод дозволяв доводити теореми, які пізніше стали основою математичного аналізу, без переходу до границі, якої греки уникали. Метод вичерпування використовував послідовне наближення до шуканої величини, доводячи, що різниця між нею та розглянутими значеннями може ставати скільки завгодно малою. Наприклад, його застосовував Архімед для обчислення площ фігур, які сьогодні знаходяться за допомогою інтегралів.

Цікаво, що творці математичного аналізу XVII століття (Ньютон, Лейбніц та інші) визнавали, що їхні методи поступаються за строгою логікою методу вичерпування. Лише пізніше, з розвитком строгих понять границі, математика змогла подолати кризу нескінченності, вперше окреслену Зеноном.

Апорії Зенона відіграли роль каталізатора у розвитку логіки та математики. Вони змусили давньогрецьких мислителів формулювати чіткі аксіоми, розробляти строгі методи доведення та шукати способи роботи з нескінченністю, не вводячи її явно. Зрештою, ця криза логіки заклала основи аксіоматичного підходу, який став наріжним каменем усієї подальшої математики.

Гіппократ з Хіоса

Класичний період став часом пошуку нових підвалин для математики. Замість чисел у центр уваги виходить геометрія. Першим, хто спробував систематизувати знання, був Гіппократ з Хіоса (V ст. до н. е.). Його трактат про «початки геометрії» став попередником великої праці Евкліда.



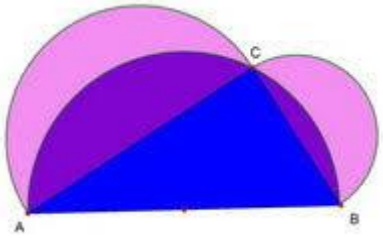
Достовірних відомостей про життя Гіппократа збереглося дуже мало. Плутарх у своїх «Порівняльних життєписах» (а точніше, у «Житті Солона») згадує його як «математика і купця». Є свідчення, що вивчати математику він почав ще на Хіосі, ймовірно, у Ойнопіда (VI–V ст. до н. е.), який стояв осторонь іонійської та піфагорейської шкіл. Водночас географічна близькість Хіоса й Самоса, а також хронологія наводять істориків на думку, що Гіппократ перебував під сильним впливом піфагорейців (його навіть інколи називають «парапіфагорейцем»).

У певний період свого життя Гіппократ утратив своє майно (за одними даними — його пограбували афінські пірати, за іншими — він став жертвою свавілля візантійських митників). Приблизно через сто років після цих подій Іоанн Філопон писав: «Дехто Гіппократ з Хіоса, купець, натрапив на піратський корабель і, втративши все, прибув до Афін, щоб розпочати судову справу проти піратів. Через цей процес він затримався в Афінах надовго і почав відвідувати уроки у філософів. У результаті він досяг таких висот у геометрії, що наважився взятися за квадратуру кола».

Аристотель описує цей випадок іронічніше: «Досить згадати Гіппократа-геометра, який у решті справ здавався невдатним і нерозумним і через свою дурість постраждав під час подорожі від візантійських збирачів мита, втративши чимало золота».

Невідомо, чи вдалося Гіппократові добитися справедливості, але непрямі дані дають підстави думати, що в Афінах він і далі займався торгівлею. Усі пізніші дослідники стверджують, що він мав у Афінах школу геометрії, якій присвятив решту життя.

Вершиною діяльності Гіппократа стала його спроба розв’язати знамениту задачу квадратури кола — побудови квадрата, рівного за площею даному колу, лише за допомогою циркуля і лінійки. Хоча сама задача виявилася нерозв’язною в межах античної геометрії, Гіппократ зробив важливий крок у її вивченні, відкривши так звані «серпки́ Гіппократа» — особливі фігури, площу яких можна виразити через площі трикутників і квадратів.



Серпками Гіппократа називають ділянки, обмежені дугою кола й стороною вписаного в нього трикутника. Гіппократ довів, що для деяких таких фігур можна строго показати рівність їхньої площі площі певного трикутника, що робило можливою їхню «квадратуру». Це був один із перших відомих випадків, коли фігуру, обмежену кривою лінією (дугою) вдалося точно співвіднести з прямолінійними фігурами.

Наступний важливий крок у розвитку цих ідей зробив Евдокс Кнідський (близько 408 р. до н. е. – близько 355 р. до н. е.), який розробив метод вичерпування. Цей метод дозволяв значно точніше обчислювати площі криволінійних фігур, розбиваючи їх на послідовність дедалі менших ділянок, кожну з яких можна було порівняти з уже відомими геометричними об’єктами. По суті, це був прообраз граничного переходу, який згодом стане основою інтегрального числення.

Метод Евдокса став фундаментом для досліджень Архімеда, який довів його до найвищої точності, формулюючи твердження, еквівалентні сучасним інтегралам. Втім, значення цих ідей виходило далеко за межі геометрії. Вони заклали підвалини строгого математичного аналізу, заснованого не на інтуїції, а на чітких логічних процедурах.

Але, як не дивно, головний прорив Гіппократа був пов’язаний не лише з «серпками» чи з основами методу вичерпування. Його суть полягала у принципово новому погляді на сам процес розв’язання задач. Звернімося до коментаря Прокла Діадоха до першої книги «Начал» Евкліда:

«Зведення — це перехід від однієї задачі чи теореми до іншої, яка, будучи вже відомою чи побудованою, робить запропоноване очевидним. Наприклад, у пошуках подвоєння куба питання було перенесене на іншу задачу, від якої залежала перша, — про знаходження двох середніх; а далі вже шукали для двох даних відрізків дві середні пропорційні. Кажуть, що першим зведення геометричних побудов здійснив Гіппократ з Хіоса, який також квадрував серпок і зробив багато інших відкриттів у геометрії, адже мав особливий талант до побудови креслень. Але цього досить».

Якщо Прокл мав рацію, то Гіппократ з Хіоса здійснив прорив, значення якого виходить далеко за межі геометрії. Він уперше усвідомив і сформулював ідею редукції — можливості й необхідності зводити одну математичну задачу до іншої, простішої й уже відомої.

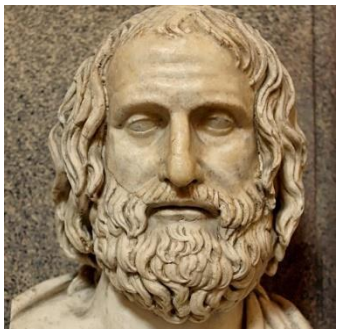
Цей підхід став наріжним каменем усієї подальшої математики. Саме так розв’язуватимуться найскладніші задачі — від теорії чисел до математичного аналізу. Класичний приклад — зведення задачі про подвоєння куба до побудови двох середніх пропорційних. У наступні епохи такі ідеї приведуть до появи алгебраїчної теорії рівнянь, а згодом — до фундаментальної концепції обчислюваності у XX столітті.

Демокріт і Протагор



Сальваторе Роза. Демокріт (у центрі) і Протагор (праворуч), 1663 р.

Ми не знаємо подробиць усіх філософських суперечок того часу — до нас дійшли лише їхні відгомони. Античні мислителі часто дискутували про природу світу, пізнання й математику. Особливе місце серед цих дискусій займали дебати про математичні абстракції та їхню обґрунтованість. Одним із філософів, який ставився до математичних ідей скептично, був Протагор.



Протагор (близько 490–420 рр. до н. е.) — давньогрецький філософ-софіст, один із перших, хто систематизував теорію пізнання та риторику. Він проголосив, що «людина є мірою всіх речей», маючи на увазі, що істина є суб'єктивною і залежить від сприйняття кожного індивіда. Початок його викладацької діяльності відносять до 450-х років до н. е. Він неодноразово відвідував Афіни, де ввійшов до кола філософів, учених, драматургів та інших видатних діячів Еллади, яке

сформувалося довкола Перікла й Аспасії[29]. Саме Протагору Перікл доручив скласти закони для нової колонії в Південній Італії — Фурій.

У молодості він працював носієм. Одного разу, несучи в'язку дров у місто, Протагор зустрів знаменитого філософа Демокріта. За однією версією, Демокріта вразив спосіб, у який були складені дрова, за іншою — пристрій, використаний для перенесення вантажу. Вражений кмітливістю Протагора, Демокріт запропонував йому стати його учнем. Ця випадкова зустріч нібито визначила подальшу долю Протагора. Проте сучасні вчені вважають цю історію недостовірною й відносять її до розряду анахронізмів: Протагор був на 20–30 років старший за Демокріта, а сам міф, ймовірно, походить від Епікура, який намагався звинуватити Протагора у запозиченні ідей Демокріта.

Близько 415 року до н. е. Протагора звинуватили в безбожності за його вислів: «Про богів я не можу знати, чи вони існують, чи їх немає, бо занадто багато заважає такому знанню: і питання темне, і людське життя коротке». Філософа було вигнано, або ж він утік із Афін до суду. Його книги конфіскували через глашатая, а потім спалили на міській площі. Однак достовірність цієї легенди викликає сумнів, адже в Давній Греції подібні акції практикувалися надзвичайно рідко. На шляху з Афін до Сицилії Протагор потрапив у шторм і загинув. Першим про його смерть у трагедії «Іксіон» повідомив Евріпід, його друг, який за кілька років також був змушений залишити Афіни й перебратися до Македонії.

Логічні труднощі, що виникли в математиці, привели Протагора до заперечення всіх математичних абстракцій. На його думку, не можна говорити про лінії без ширини чи про точки без розмірів, адже їх ніхто ніколи не бачив. Відповідно до його поглядів, коло й пряма не можуть торкатися в одній точці, а завжди стикаються на певному відрізку. Такий підхід ставив під сумнів самі основи геометрії та обмежував розвиток науки.

Однак відмова від абстракцій означала б відмову від наукового прогресу. Математика вимагає абстрактного мислення, адже її об'єкти не завжди мають точні аналоги у фізичному світі. Саме тому шлях Протагора виявився безвихідним. Історія довела, що математичні абстракції, навіть якщо вони неочевидні з точки зору чуттєвого сприйняття, необхідні для побудови строгих теорій і розвитку знань.

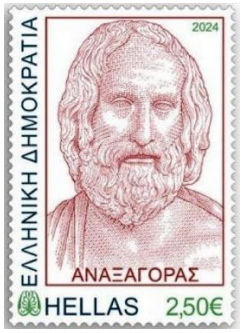
На цьому тлі особливу роль відіграв Демокріт, який запропонував інший підхід до математики.



Демокріт (близько 460–370 рр. до н. е.) народився в місті Абдери у Фракії. Протягом життя він багато мандрував, знайомлячись із філософськими вченнями різних народів — Давнього Єгипту, Вавилону, Персії, Індії та Ефіопії. В Афінах він слухав лекції піфагорійця Філолая та Сократа, був знайомий з Анаксагором. За переказом, на подорожі Демокріт витратив усе своє спадкоємство (що в

[29] Перікл (бл. 495–429 рр. до н. е.) — видатний афінський державний діяч, стратег і оратор, чия епоха увійшла в історію як «золотий вік Афін». Аспасія з Мілета (бл. 470–410 рр. до н. е.) — його супутниця життя, відома своєю освіченістю й красномовством; античні автори приписують їй вплив на культурне життя Афін і навіть на політичні рішення Перікла.

Абдерах вважалося тяжким злочином), за що його ледь не притягнули до суду. Але замість виправдань він зачитав уривки зі своєї праці «Великий устрій світу», і його співгромадяни вирішили, що гроші були витрачені не дарма.



Демокріт вів спосіб життя, який здавався дивним його співвітчизникам: усамітнювався на кладовищах, де віддавався роздумам, а його частий і, здавалося, безпричинний сміх над людськими справами приніс йому прізвисько «Філософ, що сміється». Містяни навіть запросили Гіппократа для його огляду, але лікар визнав Демокріта абсолютно здоровим і одним із наймудріших людей, яких йому траплялося зустрічати. За свідченням Лукіана, Демокріт прожив 104 роки.

Демокріт розробив атомістичну теорію світу, стверджуючи, що все складається з найдрібніших неподільних частинок — атомів. Він був прихильником теорії множинності світів: «Світів безліч, і відрізняються вони один від одного величиною. В одних немає ні сонця, ні місяця; в інших сонце й місяць більші, ніж у нас; у третіх — їх кілька. Відстані між світами також різні; в одному місці їх більше, в іншому — менше. Одні світи зростають, інші досягають розквіту, треті вже занепадають. В одних місцях світи народжуються, в інших — гинуть. Гинуть же вони, зіштовхуючись один з одним. Деякі світи позбавлені тварин, рослин і будь-якої вологи».



Побудова математики у Демокріта була пов’язана з аналізом нескінченно малих величин. Він розглядав геометричні фігури та їхні властивості, спираючись на атомістичні принципи. Цей підхід передбачив ідеї, які згодом стали основою математичного аналізу та інтегрального числення. На відміну від Протагора, Демокріт не відкидав математичні абстракції, а прагнув використовувати їх для пояснення фізичних і геометричних явищ.

Серед конкретних математичних результатів Демокріта найбільш відомим є встановлення співвідношень для об’ємів геометричних тіл. За свідченням Архімеда, Демокріт визначив, що об’єм піраміди становить 1/3 об’єму призми з тією самою основою й висотою, а об’єм конуса — 1/3 об’єму відповідного циліндра. Хоча він не залишив строгих доведень своїх тверджень, результати виявилися правильними й пізніше були доведені Евдоксом та Архімедом.

Демокріт у картинах художників XIV–XVIII століть

Образ Демокріта досить часто з’являється в європейському живописі XIV–XVIII століть із кількох причин.

Він увійшов в історію як «Філософ, що сміється», протиставлений «Філософу, що плаче» — Геракліту. Це протиставлення набуло популярності в європейській культурі, особливо в добу Відродження та бароко, коли художники шукали символічні образи. Демокріт уособлював оптимізм, життєрадісність і філософське прийняття людської глупоти, що й приваблювало митців.



Сальватор Роза. Геракліт і Демокріт (1645 р.)



Іоган Морельсе, Демокріт і Геракліт

У середньовічній та ренесансній традиції Демокріта часто зображували як «сміючогося філософа», що дивиться на марноту, марнославство й людські омани з іронією. Такий образ перегукувався із сатиричним баченням світу, особливо характерним для XVII століття — доби бароко. У цей час митці зверталися до фігури Демокріта, аби висміяти користолюбство, жагу збагачення та прагнення до влади.





Демокріт на картинах Хендріка Тербрюггена (1628) та Агостіно Карраччі (1598)

У XVII столітті, в добу наукової революції, зріс інтерес до атомістичної теорії Демокріта, яка значною мірою передбачила ідеї нової науки. Його образ почав асоціюватися з раціоналізмом та дослідницьким духом, що робило Демокріта особливо привабливим для учених і меценатів.



Рубенс, Демокріт (1603)

Демокріта часто зображували в інтер’єрі, заповненому книгами, глобусами та науковими приладами. Такі композиції відповідали поширеному типажу «філософа в кабінеті», який був популярним у живописі XVII століття.





Демокріт на картинах Іогана Морельсе (1630 р.) та Дієго Веласкеса (1628-1629 рр.).

Попри матеріалістичні погляди Демокріта, його образ використовувала церква, протиставляючи скептицизм Геракліта та іронію Демокріта над людськими оманами. Це

дозволяло художникам вписувати його у християнську картину світу, а меценати та покровителі мистецтва не бачили в таких творах загрози релігії.



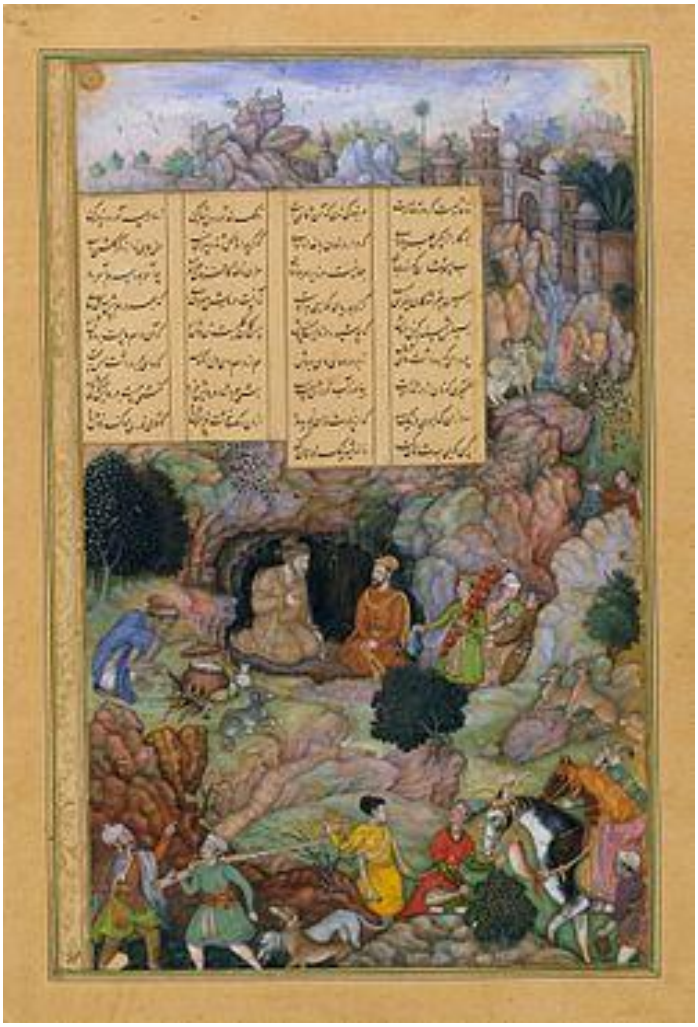
Франсуа-Андре Вінсан, Демокріт серед жителів Абдер, 1790

Отже, поєднання філософського символізму, сатиричного погляду на світ та асоціацій із наукою зробило Демокріта особливо затребуваною фігурою в європейському мистецтві XIV–XVIII століть.

Платон

Отже, до початку IV століття до н. е. у філософії домінували два головні підходи. Демокріт, спираючись на атомістичну теорію, стверджував, що весь світ складається з неподільних частинок — атомів, рух яких визначає всі події. Його концепція пізнання базувалася на відчуттях, хоча він розрізняв «істинне» й «темне» знання. Протагор же, навпаки, проголосив: «людина — міра всіх речей», відкидаючи абсолютні істини й пропонуючи релятивізм як основу розуміння світу.

Обидва ці підходи були відкинуті Платоном, який критикував атомізм як механістичний і недостатній для пояснення вищих істин. Він також різко критикував релятивізм Протагора, стверджуючи, що пізнання не може зводитися до суб’єктивних відчуттів, а істина повинна існувати незалежно від особистих думок. Для Платона математичні сутності — це ідеальні форми, що існують поза чуттєвим світом. У цьому він полемізує і з матеріалістами-атомістами, і з софістами.



Олександр Великий відвідує мудреця Платона у його печері. Лист із «Хамсе» Аміра Хосрова Дехлеві, 1597–1598 рр., Музей Метрополітен, Нью-Йорк

Матір'ю Платона була Периктіона, одна з найзагадковіших постатей давньогрецької філософії. Вона походила зі знатного афінського роду і була нащадком знаменитого законодавця Солона. Периктіона вийшла заміж за Арістона, з яким мала трьох синів — Главкона, Адеймanта і Платона, а також доньку Потону. Після смерті Арістона вона вдруге вийшла заміж за Пірилампа, афінського державного діяча і свого дядька, у шлюбі з яким народився її п'ятий син, Антифон. Антифон згадується у діалозі Платона «Парменід».



Периктіона була піфагорейською філософкою, письменницею та математиком. Деякі джерела, зокрема Діоген Лаертський, ототожнюють її з піфагорейською вченою,

донькою Главкона та племінницею Кріттія. Вважається, що вона прекрасно володіла геометрією та арифметикою, чим поділилася і зі своїм сином Платоном. Саме Периктіона першою ознайомила Платона з основами піфагорейської науки й філософії, що згодом відобразилося в його концепції ідеального світу форм.

Що стосується наукової діяльності Периктіони, до нас дійшли два твори, приписувані їй — «Про гармонію жінок» та «Про мудрість». Проте сучасні дослідники схиляються до думки, що це псевдонімні тексти, створені піфагорейськими авторами в різні часи. У «Про гармонію жінок» розглядаються обов'язки жінки щодо чоловіка, шлюбу та батьків, а в «Про мудрість» подано філософське визначення мудрості. Ці праці відображають характерні для піфагорійців ідеї про моральність, космічний порядок і роль жінки в суспільстві, проте їхнє справжнє авторство залишається невідомим.



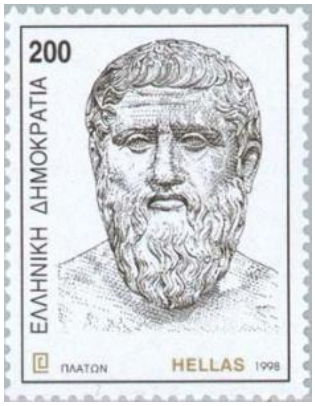
Педро Берругете. Платон, бл. 1477 р.

Попри початкову прихильність матері до формування філософських поглядів Платона, між ними виник серйозний конфлікт. Причини його залишаються предметом дискусій, проте можна припустити, що Платон, занурюючись у власні дослідження, відходив від традиційних піфагорійських догм, які Периктіона могла підтримувати. Можливо, розбіжності стосувалися не лише філософії, а й соціальної ролі жінок в інтелектуальному середовищі. Також вважають, що однією з причин конфлікту могло стати несхвалення Платоном другого шлюбу Периктіони з його дядьком Пірилампом, який, на його думку, відволікав матір від сім'ї та науки.

Як би там не було, відомо, що в знаменитій Академії Платона жінкам було заборонено відвідувати заняття — різка відмінність від піфагорійської традиції, де жінки могли брати участь у філософських та наукових дискусіях[30]. Цей вибір міг бути наслідком

[30] За приблизно 900 років існування Академії (у 529 році указом імператора Юстиніана всі філософські школи в Афінах були закриті) це обмеження порушувалося щонайменше двічі. Ластинія

особистого розчарування Платона або спробою створити філософську школу, максимально віддалену від материнського впливу. Таким чином, вплив Периктіони на Платона, без сумніву, був великим, але завершився болісним розривом, що залишив слід у його інституційних рішеннях.



Платон — одна з ключових постатей в історії філософії та математики. Він народився близько 427 року до н. е. у знатній афінській родині. Переломним моментом у його житті стало знайомство з Сократом. Після страти Сократа Платон вирушив у подорожі, відвідуючи Єгипет і, можливо, Південну Італію, де познайомився з піфагорійцями. Повернувшись до Афін, він присвятив себе філософії та науці.

Близько 387 року до н. е. Платон заснував свою знамениту Академію — першу в історії Європи освітню та науково-дослідну школу. Академія проіснувала майже тисячу років, ставши центром наукової думки античного світу. На її вході була викарбувана відома надпис: «Нехай сюди не входить той, хто не знає геометрії», що підкреслювало фундаментальну роль математики у філософській освіті. Від усіх своїх учнів Платон вимагав спершу вивчити математику, перш ніж братися за філософію, бо «за допомогою математики очищається і набирає життєвої сили орган душі, тоді як інші заняття його руйнують і позбавляють здатності бачити, тоді як він значно цінніший за тисячу очей, бо лише ним можна відкрити істину».



Мозаїка з Помпей з зображенням Академії Платона

з Аркадії вивчала твори Платона й, перевдягнувшись у чоловічий одяг, прийшла до Академії, щоб опановувати математику та філософію. Після смерті Платона вона продовжила навчання у його племінника. Саме їй ми завдячуємо визначенням сфери. Один із її найвідоміших результатів — побудова стереометричної проєкції сфери. Ареті з Керинії (IV–III ст. до н. е.) також навчалася в Академії Платона. Кажуть, що вона викладала математику, фізичну та моральну філософію в Аттиці протягом кількох років і написала щонайменше сорок книг на різні теми, включаючи математичні трактати. Серед її учнів налічувалося близько 100 відомих філософів. У своїй книзі «Жінки в науці» Джон Моранс зазначає, що на її надгробку було написано: «Велич Греції, із красою Єлени, пером Аристиппа, душею Сократа і мовою Гомера».

Платон і сам із захопленням займався математикою та вважав її найвищою формою інтелектуальної дисципліни. Він був знайомий із багатьма видатними математиками свого часу, зокрема Теєтетом, Архітом Тарентським і Евдоксом Кнідським. Їхні ідеї знайшли відображення в його діалогах, де математичні концепції використовуються для ілюстрації філософських принципів. Попри це, сам Платон не залишив значних математичних відкриттів, але він високо цінував математику як чудовий засіб тренування розуму та шлях до розуміння істинного буття.

Математика й філософія протягом століть мали сильний вплив одна на одну. У давньогрецькій традиції Піфагор і його послідовники розглядали числа як священні сутності, через які можна осягнути природу світоустрою. Вони вірили, що гармонія чисел лежить в основі буття, а сам космос улаштований за математичними законами. Для них математика була не просто інструментом обчислень, а шляхом до пізнання вищих істин, що робило її невіддільною від філософії та релігійних уявлень. Таким чином, можна сказати, що у піфагорійців математика зародилася з релігії та філософії.

Однак до епохи Платона ситуація змінилася. Розвиток математики зробив її потужним інструментом для пізнання світу, і тепер вона почала впливати на філософські ідеї. Яскравий приклад такого впливу – знаменитий платонівський міф про печеру.



Міхіль Коксі, Печера Платона[31]

[31] Хоча точна дата створення цього твору невідома, з огляду на період творчості Коксі (1499–1592), можна припустити, що картина була написана в другій половині XVI століття. Коксі був відомий своїм захопленням італійським Ренесансом і наслідуванням стилю Рафаеля, що помітно в його інтерпретації філософських сюжетів.

Цей міф описує групу людей, які від народження прикуті в глибині печери так, що бачать лише тіні предметів, проєктовані на стіну. Вони не знають, що за їхніми спинами знаходяться справжні об'єкти й джерело світла. Якби одного дня один із в'язнів звільнився, він би вийшов назовні й усвідомив, що тіні були лише блідими відображеннями реального світу. Проте подібний процес пізнання може виявитися для колишнього в'язня дуже й дуже болісним: його очі засліплені світлом, йому важко прийняти нову реальність, і спочатку він навіть вважає, що колишній світ тіней був більш достовірним. Лише з часом він звикає до нового погляду на світ і усвідомлює істину. Якщо ж він повернеться в печеру, щоб розповісти іншим про своє відкриття, вони не лише не повірили б йому, але й вороже зустріли б його слова.

Міф про печеру має глибоко математичну природу. Платон порівнює чуттєве сприйняття людини зі спостереженням тіней, тоді як істинне знання можливе лише через розумне осягнення ідеальних форм. У математиці також працюють не з матеріальними об'єктами, а з їхніми абстрактними ідеями. Числа, геометричні фігури, алгебраїчні структури існують не у фізичному світі, а в особливій, інтелектуальній реальності.

Таким чином, математика допомагає зрозуміти філософську концепцію ідеальних форм. За Платоном, ми усвідомлюємо, що світ навколо нас — це лише недосконала тінь справжніх, вічних сутностей, які можна осягнути тільки розумом. Проте цей процес потребує праці та зусиль: не відразу людина здатна усвідомити істину, і багато хто воліє залишатися у звичному світі ілюзій. Платон вважав, що саме філософи, які зуміли осягнути сутність ідей, особливо ідеї блага, гідні управляти державою, адже вони здатні бачити істинну природу речей і приймати рішення, засновані на вищому знанні. Цей підхід справив величезний вплив на подальшу філософську традицію, зміцнивши зв'язок між математикою та метафізикою, який залишається актуальним і сьогодні.



Платон і Аристотель[32]

Платон приділяв особливу увагу розвитку ідеї доведення, наполягаючи на точності визначень і ясності припущень. Саме ця методологія справила вирішальний вплив на Евкліда, який згодом створив свої «Начала» – систематичний виклад геометрії, заснований на аксіоматичному методі. Таким чином, хоча Платон сам не зробив значних внесків у математику, його підхід до логіки й доведень відіграв важливу роль у розвитку математичної науки. Ці ідеї знайшли відображення й у його космологічних побудовах.

[32] Центральна частина фрески Рафаеля «Афінська школа». Аристотель, тримаючи у руках свою «Нікомахову етику», вказує на землю, що відображає його переконаність у пізнанні через емпіричне спостереження й досвід, тоді як Платон вказує на небеса, виражаючи свою віру у світ ідей.

У своїх працях Платон описував так звані платонові тіла – правильні многогранники, пов'язуючи їх зі стихіями світобудови. Хоча самі многогранники були відомі ще піфагорійцям, а їхній повний опис уперше дав Теєтет, саме Платон популяризував їх і включив до філософської системи. Окрім цього, він розрізняв арифметику – науку, що вивчає властивості чисел, – і логістику, яку розглядали як мистецтво обчислень і застосовували у практичних підрахунках. Це розрізнення зберігалося в математичній традиції протягом багатьох століть.

Евдокс Кнідський

Серед математиків, які справили вплив на Платона та його Академію, особливо вирізняється Евдокс Кнідський. Він зробив значний внесок у геометрію, а також розробив теорію пропорцій, що стала основою для строгого математичного обґрунтування неперервних величин. Саме його ідеї згодом дозволили Евкліду створити систему аксіом і доведень, яка стала зразком для всієї подальшої математичної науки. Розгляньмо детальніше його здобутки й внесок у розвиток математики.



Евдокс Кнідський, син Есхіна, народився близько 408 року до н. е. у Кніді (Мала Азія, навпроти острова Кос) і помер приблизно 342 року до н. е. у тому ж місті. За свідченням Діогена Лаертського, він вивчав математику в Архіта Тарентського, а медицину – у Філістіона Локрійського. У двадцятитирічному віці почав відвідувати лекції в Академії Платона, ймовірно, завдяки фінансовій підтримці лікаря Теомідона, свого земляка. Щоб зекономити, Евдокс жив у порту Пірей і щодня пішки діставався до Афін.

Після навчання він повернувся до Кніда, але невдовзі, за сприяння друзів і з рекомендативним листом від спартанського царя Агесілая II до єгипетського фараона Нектанеба II, вирушив до Єгипту. Там він провів 16 місяців, вивчаючи астрономію у жерців у Геліополі й Керкесурі, користуючись давніми обсерваторіями.

Згодом переїхав до Кізика (Мала Азія), де очолив філософську школу. У 378 році до н. е. прибув до Афін разом зі своїми учнями й заснував Кізикську школу. Підтримуючи добрі стосунки з Платоном, він згодом приєднався до Академії, закривши власну школу.

Після багатьох років, проведених в Афінах, Евдокс повернувся до Кніда, де за рішенням громади став законодавцем. Серед його учнів були Менехм, Дейнострат, Афіней і Полемарх, які продовжили його традиції в Афінах і Кізику. За словами Діогена Лаертського, Евдокс мав трьох дочок і сина на ім'я Аристагор.

Його наукові праці справили величезний вплив на наступних мислителів, зокрема на Евкліда й Архімеда. Завдяки своїм відкриттям Евдокс Кнідський по праву вважається одним із найвидатніших умів античного світу.

Евдокс розробив теорію пропорцій, яка лягла в основу V книги «Начал» Евкліда. Він увів загальний метод доведення, застосовний до ліній, площин і тіл. Його принцип

«якщо дано дві несумірні величини, то завжди можна знайти кратне меншої, яке перевищить більшу» став фундаментом для майбутнього диференціального та інтегрального числення.



Йому також приписують відкриття (а можливо, і доведення) властивостей поділу відрізка в середньому та крайньому відношенні, з яких починалася остання книга його трактату.

Евдокс першим довів, що об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми з тією ж основою й висотою, а об'єм конуса – третині об'єму циліндра з тією ж основою й висотою. Він також розробив метод вичерпування, який пізніше використовував Архімед у своїх дослідженнях.

Суть цього методу полягала в поступовому обчисленні площі чи об'єму фігури через вписування та описування многокутників або многогранників, площу (об'єм) яких можна було визначити точно. Зі збільшенням кількості сторін многокутника його площа дедалі точніше наближалася до площі круга. Якщо різниця між площею круга й вписаного многокутника ставала меншою за будь-яке задане число, то вважалося, що площа круга «вичерпана цим процесом». Удосконалення цього методу належить Архімеду, який широко застосовував його для різних фігур. У Середньовіччі європейські математики теж користувалися методом вичерпування, але згодом він поступився місцем методові неподільних, а пізніше – математичному аналізу.

Евдокс розв'язав задачу подвоєння куба (як згадує Евтокій), однак його рішення не збереглося. Ератосфен називав його «божественним».

Щоб пояснити рух Сонця, Місяця й п'яти відомих тоді планет, Евдокс розробив теорію концентричних сфер. Він припустив, що кожне небесне тіло прикріплене до кількох вкладених сфер, які обертаються навколо Землі з різними швидкостями й під різними кутами, створюючи складні траєкторії. Система включала 27 сфер: одну – для нерухомих зірок, три – для Сонця й Місяця, по чотири – для кожної з п'яти планет (Меркурія, Венери, Марса, Юпітера, Сатурна). Перша сфера кожного світила пояснювала його основний рух, друга враховувала нахил орбіти, а третя й четверта відтворювали ефект ретроградного руху.

Модель Евдокса стала першою математичною системою опису космосу. Хоча вона не враховувала зміни яскравості планет (а отже, не могла пояснити їхній реальний рух по еліпсах), саме вона заклала основу для геоцентричної моделі Аристотеля та справила великий вплив на наступні астрономічні концепції, аж до Птолемея. Таким чином, Евдокс Кнідський уперше в історії намагався пояснити складний рух небесних тіл не міфами, а математикою.

Він також склав першу карту зоряного неба та дав назви сузір'ям. Його астрономічні дослідження стали основою для праць Гіппарха й Птолемея. Евдокс визначив періоди обертання планет: Марса – у 2 роки (фактично 1,88), Юпітера – у 12 років (11,86), Сатурна – у 30 років (29,46).

Евдокс довів, що Земля має кулясту форму, і вперше спробував виміряти її окружність. Хоча точні деталі його методу не збереглися, відомо, що він досліджував тривалість дня й ночі на різних широтах. Ймовірно, він ґрунтувався на спостереженнях за висотою Сонця над горизонтом у різних місцях і міг використати знання єгипетських жерців про рух небесних тіл.

Попри це, першу числову оцінку окружності Землі дав Ератосфен, застосувавши метод, заснований на вимірюванні кутів падіння сонячних променів у різних точках.

Евдокс справив величезний вплив на грецьку науку. Його теорія пропорцій стала фундаментом для робіт Архімеда й Евкліда, а модель концентричних сфер зберігала авторитет аж до доби Коперника. Хоча його астрономічні погляди згодом поступилися геліоцентричній моделі, принцип «пояснювати видимі явища» залишився основоположним в астрономії.

Теєтет Афінський

Пізні піфагорійці (V ст. до н. е.) активно займалися теорією несумірності та розглядали перші ірраціональності. Згідно з діалогом Платона «Теєтет», піфагореєць Феодор із Кирени (розглядаючи кожний випадок окремо) довів, що сторони квадратів із площами 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 несумірні зі стороною одиничного квадрата. Знову ж таки, за Платоном, перше загальне вчення про ірраціональності належить юному учневі Феодора – Теєтету, який охарактеризував перший нескінченний клас ірраціональностей виду $\sqrt{N}$. Йому також належить доведення факту, що якщо площа квадрата виражається цілим несквадратним числом, то його сторона несумірна зі стороною одиничного квадрата.



Теєтет (бл. 417–369 рр. до н. е.) народився в Афінах, у Суніоні, походив із небагатої сім'ї. За свідченнями Платона, він відзначався видатними здібностями до математики та філософії. Навчався в Академії Платона і, ймовірно, у Феодора Киренського, який займався ірраціональними числами. За деякими даними, Теєтет брав участь у війні між Афінами та Коринфом (бл. 369 р. до н. е.), де отримав поранення. Платон у діалозі «Теєтет» згадує, що він помер від ран і дизентерії.

У ході своїх досліджень Теєтет усвідомив, що ключовим поняттям у вивченні несумірності є подільність чисел. Він розробив методи, подібні до сучасного ділення з остачею (протоалгоритм Евкліда), які дозволяли порівнювати величини без безпосереднього вимірювання. Також він вивчав правильні многогранники, заклавши основи теорії Платонових тіл.

За відсутності символічної алгебри греки виражали відношення між числами геометрично. Наприклад, множення чисел уявлялося як побудова прямокутника, а ділення – як знаходження пропорційних відрізків. Такий підхід дозволив вивчати рівняння геометрично, що привело до розвитку геометричної алгебри, яка досягла розквіту в «Началах» Евкліда.

Нерозв’язні задачі

Теєтет і його послідовники ввели метод «геометричного множення» відрізків, що у сучасній алгебрі відповідає множенню чисел. Вони також досліджували квадратні рівняння за допомогою побудов і розробили способи знаходження квадратних коренів. Хоча у них ще не існувало поняття рівняння у сучасному сенсі, кожна геометрична побудова фактично відповідала розв’язанню певного типу рівняння: перетин двох прямих відповідає розв’язанню системи двох лінійних рівнянь; перетин прямої та кола – системи лінійного і квадратного рівняння; перетин двох кіл – квадратного рівняння.

Звідси випливає, що будь-яку величину, яку можна побудувати циркулем і лінійкою, можна також виразити за допомогою алгоритму послідовних квадратних радикалів (квадратних коренів).

Цей зв’язок діє і в зворотному напрямку: можна шукати розв’язання рівнянь через геометричні побудови. Тобто замість алгебраїчного розв’язку можна спробувати побудувати відрізок, що відповідає цьому розв’язанню. Якщо, наприклад, рівняння має корені, які виражаються через квадратні корені, то ці корені можна побудувати циркулем і лінійкою.

Таким чином, Теєтет і його учні не прагнули «розв’язати» рівняння в сучасному розумінні, а намагалися здійснити відповідну побудову. Якщо побудова вдавалася – вважалося, що задача розв’язана.

На цьому етапі природно постає питання: чи можна будь-яку геометричну задачу розв’язати циркулем і лінійкою? Інакше кажучи, чи можна будь-яку конструктивну задачу звести до послідовності розв’язків квадратних рівнянь? Незабаром математики зіткнулися з першими прикладами задач, які не піддавалися такому зведенню. Вони увійшли в історію як три великі нерозв’язні задачі античності:

Задача подвоєння куба. Потрібно побудувати ребро куба, об’єм якого удвічі більший за даний. Це еквівалентно розв’язанню рівняння $x^3 = 2$. Однак кубічний корінь не можна виразити лише через квадратні рівняння, а отже, задача нерозв’язна циркулем і лінійкою.

Ця задача настільки захопила уяву греків, що виникла навіть красива легенда про її походження: мешканці острова Делос звернулися до Дельфійського оракула з проханням зупинити епідемію. Оракул відповів, що для цього необхідно подвоїти золотий жертовник Аполлона, зберігши його кубічну форму.

Задача трисекції кута. Потрібно поділити довільний кут на три рівні частини[33]. Це зводиться до знаходження кореня кубічного рівняння, що виходить за межі конструкцій циркулем і лінійкою. Для окремих кутів (наприклад, 90°) задача розв’язується, але в загальному випадку – ні.

Задача квадратури круга. Потрібно побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга. Інакше кажучи, необхідно побудувати відрізок довжиною π. Це

[33] Задача нерозв’язна у класичному формулюванні, але трисекцію кута можна легко зробити методом «орігамі» у тривимірному просторі.

неможливо, оскільки число π є трансцендентним, а циркуль і лінійка дозволяють будувати лише алгебраїчні числа.

Нерозв'язність цих задач була строго доведена лише у XIX столітті.

Діностратт

Наступними (у хронологічному плані) після Евдокса Кнідського та Теєтета Афінського найвизначнішими грецькими математиками були брати Діностратт і Менехм, а також Арістей Старший.

Діностратт народився близько 390 р. до н. е. у Проконнесі, що в Пропонтиді, і був братом Менехма. Разом із ним він переселився до Афін, де прожив усе подальше життя. Спочатку навчався у Евдокса Кнідського, а згодом став членом Академії Платона та його соратником, з яким підтримував дружні стосунки.

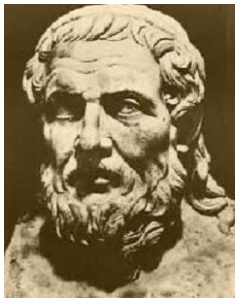
У Платоновій Академії Діностратт працював разом із Теєтетом, Леодамантом із Фасоса, Евдоксом, Менехмом і Теудієм. Папп Александрійський приписує йому розв'язання задачі про квадратуру круга (близько 350 р. до н. е.) за допомогою особливої кривої, що отримала назву квадратриси.

Квадратриса визначається як траєкторія точки, що виникає внаслідок одночасного рівномірного руху двох ліній: одна рухається поступально, інша — обертається з постійною кутовою швидкістю. У результаті виникає крива з особливими властивостями, які дозволяють розв'язувати складні геометричні задачі, недосяжні при використанні лише циркуля та лінійки.

Квадратрису вперше ввів Гіппій Елейський як інструмент для трисекції кута. Проте Діностратт знайшов для неї нове застосування: використовуючи цю криву, він запропонував метод квадратури круга, тобто побудови квадрата з площею, рівною площі даного круга. Хоча цей метод і не відповідав строгим вимогам класичної грецької геометрії, яка допускала лише циркуль і лінійку, він став важливим кроком у розвитку математичної думки.

Менехм

Про життя його брата, Менехма, відомо трохи більше, оскільки його згадує лист Ератосфена до царя Птолемея Евергета, а також роботи Прокла Діадоха. Менехм прославився своїми дослідженнями конічних перетинів, а також розв'язанням знаменитої задачі подвоєння куба.



Менехм був сучасником Платона і, за деякими джерелами, разом з Аристотелем викладав математику Олександру Македонському. В античних текстах зустрічаються згадки про його зв'язок із Академією Платона, однак наукові інтереси Менехма іноді суперечили філософським поглядам Платона.

Одним із найвідоміших епізодів, пов'язаних із Менехмом, є його демонстрація Платону механічного пристрою, розробленого ним для розв'язання задачі подвоєння куба. Плутарх повідомляє, що Платон категорично

засудив такий підхід, вважаючи, що вища геометрія не повинна ґрунтуватися на механічних методах.

Найбільшу славу Менехму принесло дослідження конічних перетинів. За словами Ератосфена, саме він уперше строго визначив і систематизував такі криві, як парабола, гіпербола та еліпс. За його задумом, ці фігури можна отримати, перетинаючи конус площиною під різними кутами. Пізніше цей фундаментальний підхід був розвинений Аполлонієм Пергським, який дав кривим остаточні назви та теоретичне обґрунтування.

Архіт Тарентський

Архіт Тарентський (бл. 435–350 рр. до н. е.) народився в Таренті, грецькому місті в Південній Італії, між 435 і 410 роками до н. е. Його родина була заможною, володіла великими земельними угіддями та рабами. На його філософське формування вплинув піфагореєць Філолай. Римський письменник Валерій Максим стверджував, що Архіт став піфагорейцем у Метапонті, одному з головних центрів цього філософського руху.



Архіт був знайомий із Платоном, з яким зустрівся 388/387 р. до н. е., і їхні стосунки історики оцінюють як дружні. Існує припущення, що Архіт став прототипом ідеального царя-філософа в «Державі» Платона. Також його високо цінував Аристотель, який присвятив йому втрачений трактат. Біографію Архіта написав Аристоксен із Тарента, учень Аристотеля, проте вона не збереглася. Пізніші джерела, включно з Діогеном Лаертським, значною мірою спиралися на Аристоксена.

Архіт поєднував філософську діяльність із політичною. Він сім разів обирався стратегом Тарента, незважаючи на закон, який забороняв двічі обіймати цю посаду, що свідчить про велике довір’я громадян. Він очолював військові кампанії проти луканів і месапів, і античні джерела повідомляють, що у своїх походах він ніколи не зазнавав поразок.

Важливу роль Архіт відіграв у звільненні Платона, який потрапив у полон до тирана Сиракуз Діонісія Молодшого. У 361 р. до н. е. він направив посольство з вимогою звільнити філософа, і Діонісій був змушений виконати цю вимогу.

Архіт загинув близько 350 р. до н. е., ймовірно, в корабельній аварії в Адріатичному морі. Його смерть була оплаканою багатьма сучасниками, зокрема поетом Горацієм.

У античних джерелах Архіт постає як зразок мудрості, самовладання та справедливості. Його цінували за раціональний підхід до управління та філософські погляди, засновані на піфагореїзмі. Він вважав, що розум повинен керувати пристрастями, а надмірні тілесні насолоди ведуть до морального розкладу. Цицерон наводить слова Архіта: «Найсмертоносніший бич, який природа дала людям, — тілесна насолода; пристрасті, що прагнуть цього задоволення, безрозсудно і невгамовно прагнуть його отримати;

звідси зради батьківщині, падіння державного ладу, таємні зв’язки з ворогами; словом, немає злочину чи поганого вчинку, на який пристрасне бажання тілесної насолоди не штовхнуло б людину; кровозмішення, перелюбства та всі подібні гидоти народжуються лише від жадоби насолоди; тоді як найпрекрасніше, що дарувала природа або божество людині, — це розум, і нічого так не ворожо цьому божественному дару, як тілесна насолода; адже при пануванні похоті немає місця для помірності, а в царстві насолоди доблесті немає місця».

Одна з відомих історій про Архіта стосується його ставлення до гніву. Повертаючись із походу, він виявив, що управитель його маєтку погано виконує обов’язки. Спочатку, охоплений гнівом, хотів його покарати, але заспокоївшись, скасував рішення, пояснивши: «Не можна карати у стані афекту». Він додав слугам: «Ваше щастя, що я розгнівався на вас: не трапись цього, ви б ніколи не уникли покарання!»

Архіт запропонував один з перших відомих розв’язків задачі подвоєння куба, використавши перетин трьох поверхонь — конуса, циліндра та тора. Його метод, відомий як «крива Архіта», згадується у коментарі Евтокія до другої книги трактату Архімеда «Про сферу та циліндр». Ван-дер-Варден писав про цей розв’язок: «Хіба це не дивовижно? Архіта, мабуть, осяяло справжнє божественне натхнення, коли він знайшов цю побудову».

За Апулеєм, на відміну від поширеної гіпотези, що об’єкти випромінюють «атоми», сприймані оком, Архіт вважав, що зір виникає завдяки випромінюванню променів самим оком. Ці промені контактують з об’єктами і відбиваються назад, створюючи зоровий образ. Архіт приділяв велику увагу геометричним аспектам оптики, підкреслюючи свою прихильність до математичних методів дослідження природи.



Реконструкція перистери з музея давньогрецької технології Костаса Котцана

Він одним із перших запропонував математичне пояснення звуку, стверджуючи, що звук виникає при русі тіл і поширюється у вигляді матерії. Архіт пов’язував висоту звуку зі швидкістю його поширення: чим швидше рух, тим вищий тон, і підтверджував це прикладами метальної зброї, духових інструментів та людського голосу.

Архіт був першим, хто застосував математичні принципи в механіці, а також вперше використав принцип дії і протидії, на якому базується робота ракет і реактивних літаків. За свідченням Фаворина і римлянина Авла Геллія, Архіт винайшов і побудував літальний апарат із газовою тягой, названий «петомеханою» або «перистера» (голуб). Крім того, Аристотель приписує йому створення дитячого брязкальця, демонструючи його інтерес до практичного застосування науки.

Архіт розробив математичну теорію музичних інтервалів, поширивши її на всі три давньогрецькі тетрахорди: діатонічний, хроматичний та енармонічний.

Йому також належить один із перших аргументів на користь безкінечності Всесвіту: якщо б людина досягла його краю, вона могла б простягнути руку за межу, а це означало б існування простору й поза нею.

Архіт надавав математиці виняткового значення, вважаючи її основою всіх наук. Він розглядав арифметику, геометрію, астрономію та музику як «сестринські науки», об'єднані логікою й числовими закономірностями. На відміну від Платона, який бачив у математиці лише підготовку до філософського пізнання, Архіт розумів її як самостійний засіб дослідження світу. Він також вважав, що завдяки науці про числа можна досягти справедливого розподілу ресурсів і запобігти соціальним потрясінням.

Аристотель

Аристотель народився 384 року до н. е. у місті Стагіра, грецькій колонії на Халкідиці. За місцем народження він отримав прізвисько Стагірит. Його батько, Нікомах, був придворним лікарем македонського царя Аминти III і походив із роду асклепіадів, що зумовило раннє знайомство Аристотеля з медициною та натурфілософією. Мати філософа, Фестіада, була родом із Халкіди на Евбеї.

Дитячі роки Аристотель провів при македонському дворі, але після смерті батьків його вихованням опікувався Проксен з Аттарнея. У 367 році до н. е. сімнадцятирічний Аристотель вирушив до Афін, де вступив до Академії Платона. Там він провів двадцять років, вивчаючи філософію, логіку, риторику, біологію та інші науки. Хоч Аристотель високо цінував Платона, він не поділяв усіх його поглядів, зокрема вчення про ідеї, що згодом стало підґрунтям для створення власної філософської системи.

Після смерті Платона у 347 році до н. е. Аристотель залишив Афіни й вирушив до Малої Азії, де мешкав в Ассі при дворі тирана Гермія, а згодом у Мітілені на острові Лесбос. У 343 році до н. е. його запросив македонський цар Філіп II для виховання свого сина — Александра. Протягом кількох років Аристотель навчав майбутнього завойовника філософії, наукам, політиці й літературі. Це співробітництво вплинуло на світогляд Александра, а самому Аристотелю забезпечило прихильність і підтримку македонського двору.

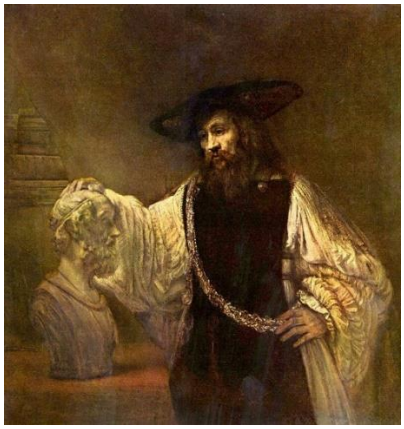
У 335 році до н. е. Аристотель повернувся до Афін і заснував власну філософську школу — Лікей. Вона стала осередком науки й філософії, а її учнів називали перипатетиками. Саме тут він створив численні праці з логіки, метафізики, етики, політики, біології та риторики, заклавши підвалини західної філософії й науки.



Густав Спангенберг. Школа Аристотеля, 1883-1888 рр.

Після смерті Александра Македонського у 323 році до н. е. в Афінах спалахнуло антимакедонське повстання, і Аристотеля звинуватили в безбожності. Побоюючись повторити долю Сократа, він залишив Афіни та вирушив до Халкіди на острові Евбея, де невдовзі помер у 322 році до н. е. від хвороби шлунка.

Аристотель поділяв науки на три основні групи: теоретичні – фізика, математика та «перша філософія» (метафізика), спрямовані на пізнання заради самого пізнання; практичні – етика й політика, що вивчають поведінку людей і управління державою; поетичні (творчі) – мистецтва, пов’язані зі створенням і вираженням ідей.





Аристотель у роботах Рембрандта (1653 р.), Паоло Веронезе (1560 р.) і Франческо Хайеса (1811 р.)

Хоча головна увага філософа була зосереджена на логіці, він зробив значний внесок і в природничі науки. Його спостереження за довкіллям привели до створення однієї з перших систем класифікації живих істот. Він вважав, що природа діє відповідно до певних цілей (телеологія), і розглядав математичні принципи як важливі інструменти пізнання світу.

Математика у системі Аристотеля займала особливе місце – між фізикою та метафізикою: вона досліджує абстракції, але спирається на спостереження за фізичним світом. Ставлення Аристотеля до математики відрізнялося від поглядів його вчителя Платона: якщо Платон розглядав математичні об’єкти як частину світу ідей, то Аристотель виокремлював із цього світу універсальні сутності – числа та геометричні форми.



Мармурні бюсти римської епохи

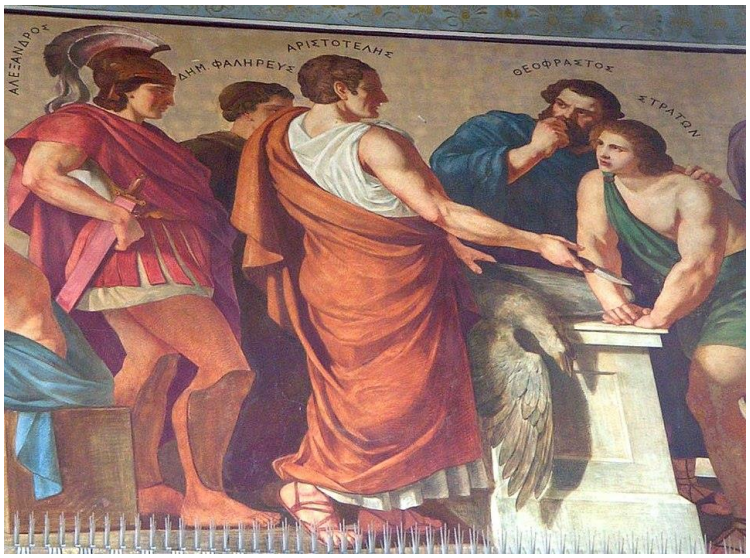
Аристотель приділяв велику увагу природі математичних об’єктів та їхньому зв’язку з реальністю. Він уважав, що існування математичних сутностей підтверджується лише тоді, коли їх можна побудувати чи довести логічно. Це видно з його твердження: «Знати – означає встановити за допомогою доведення». На відміну від Платона, який вважав знання осягненням ідеального світу, Аристотель наголошував на необхідності емпіричного обґрунтування.



Сюжет «Аристотель і Кампаста»[34]: статуя кінця XIV або початка XV, гравюра Бартоломеуса Спрангера (1590і рр.), картина Етьена Жора ігравюра Ганса Брозамера (1545 р.).

[34] Не завжди філософ поставав у вигляді розважливого мислителя. Середньовічне мистецтво та доба Відродження відобразили інший бік його образу – через легенду про Філліс (Кампаспу), яка поставила філософа на коліна.

Для Аристотеля було дуже важливим питання існування об’єктів, визначених у математиці, адже саме визначення ще не гарантує їхнього буття. У своїх працях він аналізував сутність математичних понять, розрізняючи визначення, аксіоми, гіпотези та теореми. Його дослідження проблеми нескінченності вплинули на подальші математичні теорії. Наприклад, він зазначав, що додатні цілі числа мають нескінченну потужність щодо додавання, а геометричні величини – щодо ділення.



Едуард Лебедцький за ескізом Карла Раля, частина фрески на фасаді Університета Афін, 1888 р.

Поштові марки, присвячені Аристотелю

Поштові марки — це не лише спосіб оплати пересилання листів, а й культурні артефакти, що віддзеркалюють найважливіші моменти історії, науки й мистецтва. Вони перетворюються на маленькі «вікна» у світ культури, науки та філософії. Кожна серія чи окрема марка розповідає по-своєму про значні події та людей, які вплинули на хід цивілізації. Серед цих постатей особливе місце займає Аристотель — мислитель, чия спадщина виявилася настільки багатогранною, що й сьогодні залишається живою частиною людської культури.

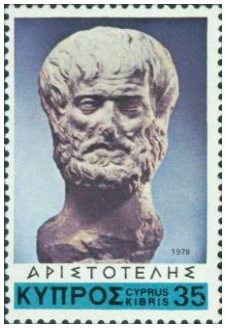
Перші марки з його зображенням з’явилися в середині XX століття. У 1956 році Греція видала серію, де був представлений бюст великого філософа. Цей випуск заклав традицію поштового вшанування Аристотеля у філателії. Згодом подібні образи

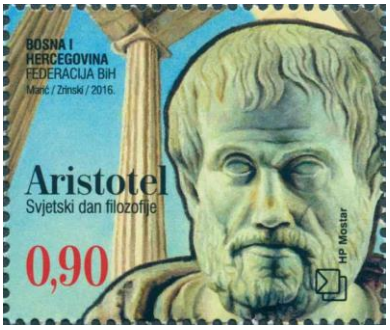
Згідно з легендою, записаною 1189 року священником церкви Нотр-Дам у Руані Анрі де Анделі, юний Александр Македонський був захоплений гетерою на ім’я Філліда (або Кампаспа) й потрапив під її вплив. Це непокоїло Аристотеля, який був наставником Александра. Він наважився поговорити з Кампаспою безпосередньо й попросив її залишити Александра. Вона погодилася, але за умови, що філософ дозволить їй «осідлати» його. Аристотель змушений був пристати на цю вимогу. Саме в такому вигляді їх і застав Александр. Тоді Аристотель звернувся до здивованого учня: «Бачиш, якщо вона таке витворяє зі мною, старим і досвідченим чоловіком, то уяви, що вона може зробити з тобою». Це переконало Александра розірвати стосунки з Кампаспою.

Цей сюжет став дуже популярним у мистецтві: гравюри, мініатюри, вітражі й навіть розписи будівель зображували сцену, де Філліс осідлала великого мислителя, тримаючи його за повіддя. Подібні зображення можна зустріти в середньовічних рукописах та на різьблених каменях готичних соборів.

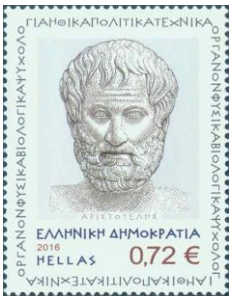
філософа — переважно у вигляді античних бюстів — з'являлися і в інших країнах: на Кіпрі (1978), у Малі (1978), у Боснії та Герцеговині (2016).







У 2016 році Греція випустила ще одну пам'ятну серію із трьома марками, на яких Аристотель зображений відомий бюст римського періоду.







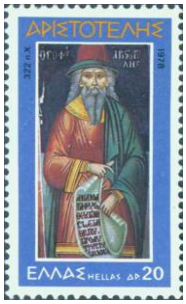
Одним із найпопулярніших сюжетів стала знаменита фреска Рафаеля «Афінська школа», де Аристотель постає поряд із Платоном та іншими мислителями античності. У 1968 році цю картину використала на своїй марці держава Ємен, а в 1978 році — Греція, підкреслюючи спадкоємність античної традиції.

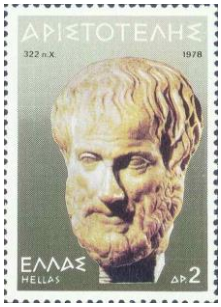




1978 рік узагалі став переломним у поштовій історії Аристотеля: саме тоді Греція видала одразу кілька марок — з шануванням міста його народження, із його портретом та у складі серії, присвяченої античним філософам. У тому ж році Малі і Мексика вшанували Аристотеля своїми випусками.











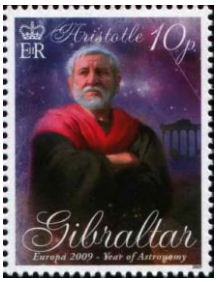


У 1992 році Греція представила його зображення у своєму випуску, а Іспанія видала марку з цитатою мислителя.

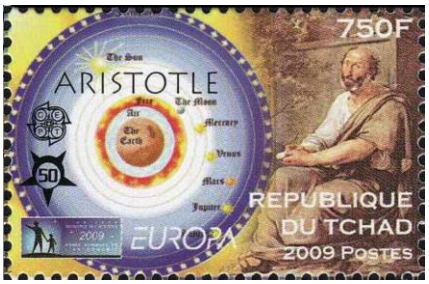




У XXI столітті інтерес до постаті Аристотеля не зменшився. У 2009 році Гібралтар випустив марку із його зображенням, а Чад відзначив філософа серією, де відтворені його наукові праці, нагадуючи про Аристотеля як про мислителя-енциклопедиста. Останніми роками традицію підтримала Греція, знову повернувши Аристотеля на свої поштові мініатюри (2016).







Таким чином, філателія ще раз підтверджує універсальність постаті Аристотеля: від античних бюстів до цитат і репродукцій його творів, від Європи до Африки й Америки — образ цього мислителя присутній у поштовій культурі світу. Кожна марка з його зображенням — це маленьке «пересувне пам’ятник», що нагадує про спадщину грецького мудреця.

Автолік з Пітани

Ще один блискучий учень Платона – Автолік з Пітани (близько 360–290 рр. до н. е.). На відміну від багатьох своїх сучасників, чиї твори дійшли до нас лише у вигляді фрагментів і згадок у пізніших авторів, праці Автоліка повністю збереглися, що робить його одним із найдавніших учених, чиї ідеї доступні нам безпосередньо.


AVTOLYCI DE SPHÆRA
QVÆ MOVETVR. LIBER.
&
THEODOSII TRIPOLITAE
DE HABITATIONIBVS
LIBER.
Omnia Scholijs Antiquis, & figuris illustrata:
De Vaticana Bibliotheca deprompta: & nunc
primum in lucem edita.
IOSEPHO AVRIA. NEAPOL. INTERPRETE.
His additæ sunt Maurolyci annotationes.
ROMAE, Apud Haeredes Antonij Bladij, Impressores
Camerales.

Видання 1587 р.

Першою повністю збереженою математичною працею античності вважається трактат Автоліка «Про сферу, що обертається». У ньому Автолік розглядає властивості сферичної астрономії та описує рух точок на сфері, яка рівномірно обертається. Трактат складається з 12 теорем, у яких розглядаються питання обертання небесного склепіння навколо своєї осі, положення небесних кіл відносно спостерігача та вплив географічної широти на видиме небо. В одному з положень він описує «коло, що проходить через середини знаків зодіаку», яке, судячи з усього, є екліптикою. Оригінальність Автоліка полягає в тому, що він застосовує строгий дедуктивний метод, вибудовуючи свої теореми логічно, а не просто описуючи явища.

Евклід включив деякі ідеї з цієї праці до «Начал». Пізніше Теодосій з Віфінії використав його ідеї у своєму трактаті «Сферика». В епоху Відродження Франческо Мавроліко переклав його твори латиною, сприяючи їх збереженню та поширенню серед європейських учених.

Інша праця Автоліка, «Про сходи і заходи», присвячена дослідженню видимості зір у різні моменти доби та пори року. Це дослідження перегукується з темою Евклідових «Явищ», де також розглядається питання, чому різні знаки зодіаку потребують різного часу для свого сходу та заходу. Оскільки в епоху Автоліка тригонометрія ще не була розвинена, його положення мають описовий характер. Лише Гіппарх згодом зміг точно обчислювати часи сходів і заходів знаків зодіаку за допомогою таблиць хорд. Автолік підкреслює, що «кожне небесне тіло, яке сходить і заходить, завжди робить це в одних і тих самих точках горизонту». Це фундаментальне положення стало основою подальших досліджень руху небесних тіл.

Аристей Старший

Аристей Старший (370–300 рр. до н. е.) – давньогрецький математик, який змінив Евдокса Кнідського на посаді керівника школи в Кірені. Він був сучасником Евкліда й,

імовірно, старший за нього за віком. Про його життя відомо небагато, проте його ім'я зустрічається в працях пізніших античних математиків.

Папп Александрійський (IV ст. н. е.) згадував Аристея у своєму творі «Математичний збірник», називаючи його «старшим», що може вказувати на існування іншого математика з таким самим іменем. Також про його роботи писав Гіпсикл у II ст. н. е.

Основна праця Аристея – «П'ять книг» («Елементи конічних перетинів»), присвячена дослідженню конічних перетинів. Цей твір передував працям Аполлонія Перзького й, імовірно, вплинув на розвиток геометрії в наступні століття. Окрім конічних перетинів, Аристей також вивчав правильні многогранники, можливо, розглядаючи їх у межах того ж дослідження.

Папп Александрійський високо оцінював «П'ять книг» Аристея, підкреслюючи їхнє значення в розвитку теорії конічних перетинів. Він зазначав, що праці Аристея стали важливою основою для подальших досліджень у цій галузі. Імовірно, деякі ідеї Аристея були використані Евклідом та Аполлонієм.

Евклід

Після бурхливого розвитку математики в давньогрецьких школах – від іонійців, Піфагора та його послідовників до Академії Платона і Лікею Аристотеля – виникла потреба в систематизації накопичених знань. Геометрія, теорія чисел і теорія пропорцій розвивалися завдяки працям Евдокса, Менехма, Автоліка та інших, проте їхні відкриття існували у вигляді розрізнених результатів, окремих методів і розв'язків.



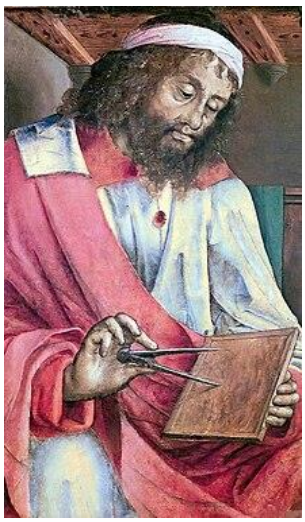
На цьому тлі, у III столітті до н. е., в Александрії – одному з головних наукових центрів еллініcтичного світу – з'явився Евклід. Про його життя відомо небагато: ймовірно, він навчався в Афінах, можливо, в Академії Платона, а згодом на запрошення Птолемея I очолив математичну школу при щойно заснованій Александрійській бібліотеці. Евклід не був першовідкривачем у звичному розумінні – він не відкрив нових теорем і не запропонував революційних методів. Проте його геніальність полягала в іншому: він зумів зібрати, впорядкувати й логічно обґрунтувати всю геометричну науку свого часу.

Античні автори відзначали скромність Евкліда, його чесність і доброзичливе ставлення до тих, хто сприяв розвиткові математики. З ім'ям Евкліда пов'язано кілька анекдотів, що передавалися крізь віки. Один із них, наведений Проклом, розповідає, що коли цар Птолемей I попросив Евкліда пояснити геометрію простішим способом, математик відповів: «Μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί Γεωμετρίαν» («У геометрії немає царських шляхів»). Ця фраза виражає сутність математичного знання: воно потребує послідовного й строгого вивчення, без привілеїв і спрощень навіть для царів.



Евклід. Мініатюра VI ст. н. е. з рукопису римських землемірів (зберігається у Вольфенбюттельській обласній бібліотеці м. Брауншвейг)

Інша розповідь, що збереглася в античних джерелах, говорить про початківця-учня, який, щойно почувши перше твердження Евкліда, запитав: «А що я зможу заробити, вивчивши все це?» Евклід, недовго думаючи, покликав свого раба і сказав: «Дай йому три оболи, бо бідолаха хоче заробити гроші своїм навчанням».



Юстус ван Гент. Евклид, бл. 1474 р.

Результатом праці Евкліда стали «Начала» – трактат, який не лише систематизував відомі знання, а й заклав строгий аксіоматичний метод, що став зразком для математики на віки. Тож розгляньмо тепер, що являв собою цей твір і чому його вплив виявився таким великим.

«Начала» Евкліда

Серед усіх світських книг, коли-небудь написаних людиною, «Начала» Евкліда займають особливе місце. За кількістю перевидань, перекладів і випущених копій вони не мають собі рівних серед нерелігійних текстів (а серед релігійних поступаються лише Біблії). Уже понад два тисячоліття «Начала» залишаються основою математичної освіти в усьому світі, а їхній вплив виходить далеко за межі самої науки, поширюючись на філософію, механіку й навіть архітектуру.



Фрагмент папірусу «Начал» Евкліда, датований приблизно 75–125 рр. н. е.

Як і будь-який фундаментальний твір, «Начала» не виникли у вакуумі. Евклід спирався на попередників – Гіппократа з Хіоса, Теєтета, Евдокса та інших, хто закладав основи грецької математики. Проте його заслуга полягала не у відкритті нових фактів, а в їх систематизації. У цьому він наслідував традиції Платонівської Академії, де особливу увагу приділяли строгій логічній побудові науки. Як зазначав Прокл, Евклід «включив у свої «Начала» багато з Евдокса, удосконалив чимало з Теєтета і навів незаперечні доведення того, що його попередники показували неповно».



Метою Евкліда, очевидно, було дати опис тих основних елементів, на підставі яких могли розвиватися всі розділи сучасної йому математики. Він не тільки виклав принципи геометрії, а й створив метод, що став зразком для науки на віки. У «Началах» він застосував аксіоматичний підхід, починаючи з означення понять, далі формулюючи аксіоми й, нарешті, виводячи з них теореми. Такий спосіб викладу дозволив побудувати систему, у якій кожне нове знання спирається на попереднє, забезпечуючи строгий логічний зв’язок.

Зміст «Начал» виходить далеко за межі елементарної геометрії. У них Евклід заклав основи не тільки планіметрії та стереометрії, а й алгебри, теорії чисел, вчення про відношення величин та методів доведення. Згодом на цій системі базувалася вся класична механіка, а у XVII столітті Ісаак Ньютон, надихаючись евклідовою строгістю, створив свою Математичну основу натуральної філософії.

Розгляньмо структуру «Начал», їхній зміст, вплив і історичне значення. Почнемо з того, як саме Евклід організував цей твір і які математичні ідеї він у ньому заклав.

У класичній реконструкції Йоганна Гейберга «Начала» складаються з 13 книг, до яких традиційно додають ще дві книги про п’ять правильних многогранників, приписувані Гіпсіку Александрейському та школі Ісидора Мілетського.

Кожна книга починається з визначень, за якими йдуть постулати й аксіоми. Далі йдуть теореми (твердження, які необхідно довести) й задачі (побудови, які необхідно виконати). Загалом у «Началах» міститься 130 визначень, 5 постулатів, 5 (або 9) аксіом, 16 лем і 465 теорем.



Евклід відчиняє врата Саду Математики.

Ілюстрація з трактату Нікколо Тартальї «Нова наука».

Перша книга закладає основи евклідової геометрії. Вона містить означення базових геометричних об’єктів, таких як точка, лінія, поверхня, пряма, а також вводить постулати й аксіоми. Наведемо приклади перших означень:

Точка – це те, що не має частин.

Лінія – довжина без ширини.

Кінці лінії – точки.

Пряма лінія – та, що однаково лежить на всіх своїх точках.

Поверхня – це те, що має лише довжину і ширину.

Кінці поверхні – лінії.

Плоска поверхня – та, що однаково лежить на всіх своїх лініях.

Після визначень ідуть постулати, які встановлюють базові принципи геометрії:

Від будь-якої точки до будь-якої точки можна провести пряму.

Обмежену пряму можна безперервно продовжувати по прямій.

Із будь-якого центра будь-яким радіусом може бути описане коло.

Усі прямі кути рівні між собою.

Якщо пряма, що перетинає дві інші прямі, утворює внутрішні односторонні кути, менші від двох прямих, то, продовжені необмежено, ці дві прямі зустрінуться з того боку, де кути менші від двох прямих.

Останній постулат (п’ятий) посідає особливе місце в евклідовій геометрії, адже його доведення довгий час залишалося відкритим питанням. Спроби довести його призвели до створення неевклідової геометрії.

За постулатами йдуть аксіоми, які є загальнішими математичними принципами, застосовними не лише в геометрії:

Рівні одному й тому ж рівні й між собою.

І якщо до рівних додаються рівні, то й цілі будуть рівні.

І якщо від рівних віднімаються рівні, то рештки будуть рівні.

І якщо до нерівних додаються рівні, то цілі будуть нерівні.

І подвійні одного й того ж рівні між собою.

І половини одного й того ж рівні між собою.

І ті, що накладаються одне на одного, рівні між собою.

І ціле більше від частини.

І дві прямі не містять простору.

Як бачимо, до аксіом віднесено загально-математичні принципи, такі як властивості рівності, подільності й величини, а постулати стосуються безпосередньо геометричних побудов.



Після аксіом у першій книзі Евклід подає три задачі на побудову. Наприклад, одна з них вимагає «від даної точки відкласти пряму, рівну даній прямій», проте Евклід не користується циркулем безпосередньо, а спирається на третій постулат. У доведенні деяких теорем він також застосовує метод накладання, який не був прямо зазначений у постулатах і аксіомах.

Завершується перша книга знаменитою теоремою Піфагора.

Друга книга містить теореми, пов’язані з «геометричною алгеброю» (як її розуміли піфагорійці), що розглядала співвідношення між фігурами й числами. Усі числа тут подані відрізками прямої з відповідними довжинами, а дії над числами розумілися

геометрично: щоб додати два відрізки, початок другого приставляли до кінця першого. Добуток двох чисел розумівся як площа прямокутника, побудованого на відрізках потрібної довжини, а добуток трьох чисел – як об’єм відповідного паралелепіпеда.

Третя книга присвячена колам, їхнім хордам, дотичним і кутам.

Четверта книга розглядає вписані й описані многокутники, а також методи побудови правильних многокутників.

П’ята книга містить загальну теорію відношень, розроблену Евдоксом Кнідським, яка фактично формулює властивості дійсних чисел. Ця книга написана на значно вищому рівні, ніж перші чотири. Примітно, що Евклід включив у свій твір настільки нові й прогресивні для своєї епохи теорії. Адже за його життя вчення Евдокса про пропорції ще не мало широкого поширення.

Шоста книга присвячена застосуванню теорії пропорцій із П’ятої книги до геометрії. Сучасною мовою кажучи, Евклід досліджує подібність геометричних фігур. Цією книгою завершується розділ планіметрії.

Книги VII–IX охоплюють теорію чисел. Тут розглядаються подільність, властивості простих і досконалих чисел, а також алгоритм Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника.

Десята книга – найбільша за обсягом, вона присвячена класифікації неспівмірних величин. Більшість результатів, поданих у ній, належать Теєтету.

Одинадцята книга вводить основи стереометрії – науки про тривимірні фігури.

Дванадцята книга використовує метод вичерпування для доведення теорем про піраміди й конуси, зокрема показує, що об’єм конуса становить третину об’єму циліндра з тими самими основою та висотою.

Тринадцята книга завершує твір побудовою правильних многогранників і доведенням того, що їх існує всього п’ять.

Арістарх Самоський

Арістарх Самоський (близько 310 до н. е. – близько 230 до н. е.) був видатним давньогрецьким астрономом і математиком, чиї ідеї значно випередили свій час. На жаль, відомостей про його життя збереглося вкрай мало, і більшість інформації про нього дійшла до нас лише через опосередковані джерела.

Арістарх народився на острові Самос, що мав багаті морські та наукові традиції. Самосці активно займалися мореплавством, астрономічними спостереженнями й дослідженнями небесних явищ, що, ймовірно, вплинуло на вибір його майбутніх інтересів. Його вчителем був видатний філософ і голова перипатетичної школи Стратон із Лампсака, знаний своїм раціоналістичним підходом до науки та прагненням пояснювати природні явища природними причинами. Саме під його впливом Арістарх почав розробляти власні погляди на будову Всесвіту.



Портрет Арістарха в атласі Андреаса Целларія XVII століття.

Точно невідомо, де Арістарх провів більшу частину свого життя, але можна припустити, що значний час він працював в Александрії – одному з найбільших наукових центрів елліністичного світу. Саме в цей період в Александрії створювалася знаменита бібліотека, яка сприяла розвитку науки й поширенню знань.

Єдина точна дата, пов'язана з його життям, – це 280 рік до н. е., коли, за повідомленням Птолемея, Арістарх здійснив спостереження сонцестояння.



Найбільшу славу Арістарх здобув завдяки своїй гіпотезі про геліоцентричну будову світу. Архімед у своєму трактаті «Псамміт» згадує, що Арістарх стверджував: Земля обертається навколо своєї осі та рухається по орбіті навколо Сонця, яке залишається нерухомим, як і зорі. Він також припускав, що Всесвіт значно більший, ніж вважали його сучасники, оскільки паралакс зірок не спостерігається неозброєним оком. Проте ця революційна ідея не отримала визнання в античності, оскільки перемогли геоцентричні погляди, сформовані вченням Арістотеля та Птолемея.

Висловлювання Арістарха про рух Землі викликало критику серед філософів того часу. Плутарх у своєму творі «Про видимий лик на Місяці» згадує, що філософ-стоїк Клеанф навіть пропонував звинуватити його в безбожності й нечестивості, адже така теорія суперечила традиційним уявленням про світ. Проте невідомо, чи мало це звинувачення якісь реальні наслідки для вченого.

Арістарх проводив спостереження місячних затемнень, коли Місяць проходить крізь тінь Землі, і на їхній основі оцінив діаметр Місяця як приблизно втричі менший за земний. Використовуючи обчислення Ератосфена, згідно з якими довжина кола Землі становить 42 000 км, Арістарх дійшов висновку, що довжина кола Місяця дорівнює

близько 14 000 км. Сьогодні відомо, що реальна довжина кола Місяця становить приблизно 10 916 км.



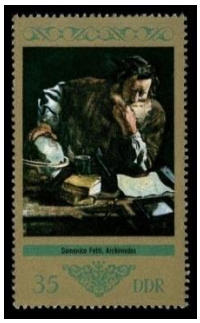
Арістарх також намагався визначити розміри та відстані до Сонця й Місяця. Він помітив, що в моменти першої та останньої чверті Місяця кут між лініями, які з'єднують Землю, Місяць і Сонце, становить майже 90 градусів. Він оцінив цей кут у 87 градусів і, застосувавши геометричні методи, дійшов висновку, що Сонце перебуває у 20 разів далі, ніж Місяць. Насправді ж це співвідношення становить близько 390. Спираючись на це, Арістарх зробив висновок, що Сонце повинно бути у 20 разів більшим за Місяць. Хоча його розрахунки ґрунтувалися на помилкових даних, його загальний метод був правильним, а висновок про значно більші розміри Сонця порівняно із Землею підтримував його геліоцентричну гіпотезу.

Архімед



Після Евкліда, чиї «Начала» заклали міцний фундамент для геометрії та логіки доведень, антична математика продовжила стрімко розвиватися. Але якщо Евклід був великим систематизатором, який зібрав воєдино знання свого часу, то Архімед був людиною зовсім іншого складу – винахідником, дослідником, мислителем, який не лише доводив теореми, а й застосовував їх у найнесподіваніших і блискучих практичних задачах. Він не просто розширив досягнення Евкліда, а й заклав основи для інтегрального числення, гідростатики та механіки. Саме він зміг поєднати абстрактні математичні ідеї з їхніми реальними фізичними проявами, що зробило його праці актуальними навіть через століття.

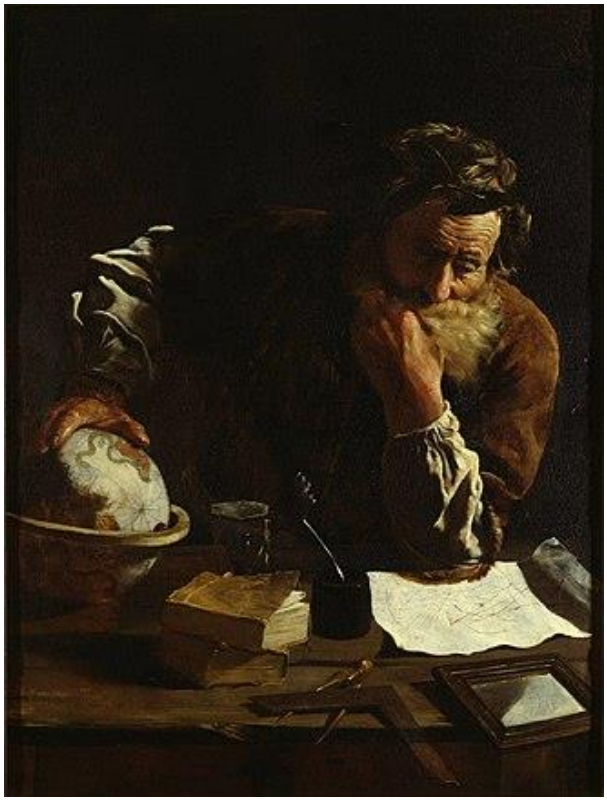
Архімед народився 287 року до н. е. у місті Сіракузи – грецькій колонії на острові Сицилія. Його батьком, за припущеннями, був математик і астроном на ім'я Фідій. Вважається, що сім'я Архімеда була небагатою. Батько навчив сина тому, що знав сам, передусім математиці, адже не міг дати йому повноцінної освіти, яка б включала філософію та літературу. Проте Архімед із дитинства виявляв живий інтерес до наук.



За словами Плутарха, Архімед доводився родичем майбутньому правителю Сіракуз – Гієрону, що згодом зіграло важливу роль у його долі. Після того як Гієрон утвердив свою владу в Сіракузах, у Архімеда з'явилася можливість поїхати на навчання в Александрію – один із найбільших наукових центрів античного світу. Там він спілкувався з відомими вченими, серед яких були астроном Конон і універсальний мислитель Ератосфен. Пізніше Архімед підтримував із ними листування, а свої праці адресував їм та їхнім учням.

Повернувшись у рідні Сіракузи, Архімед не прагнув зайняти місце при дворі, попри родинні зв'язки з царем. Він віддавав перевагу усамітненому життю, повністю присвятивши себе роздумам і винаходам. Проте Гієрон II прихильно ставився до занять

Архімеда й інколи надихав його на створення різних механізмів, зокрема й корисних для міста.



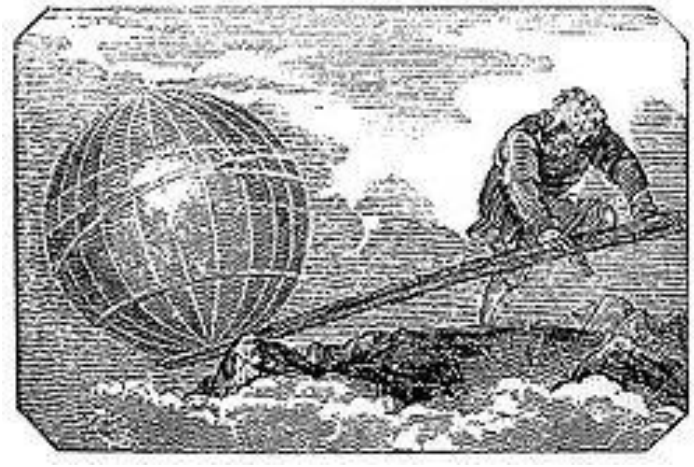
Доменіко Фетті, Архімед, 1620 р.

З іменем Архімеда пов’язано безліч легенд, одна з найвідоміших – історія з царською короною. За переказом, Гієрон запідозрив, що ювелір підмінив частину золота, виданого на виготовлення корони, сріблом. Визначити це доручили Архімеду. Розмірковуючи над задачею, він пішов у лазню, де, занурюючись у ванну, помітив, як піднімається рівень води. Натхненний цією ідеєю, він, за легендою, вискочив із ванни й, забувши про одяг, з криком «Еврика!» помчав до царя. Згодом, провівши серію дослідів із посудиною води та еталонними злитками, Архімед довів, що корона справді витісняє більше води, ніж злиток чистого золота тієї ж ваги, а отже, містить срібло.



Архімед із криком «Еврика» біжить до царя, гравюра Г. Мадзукеллі, 1737 р.

Ще одна історія розповідає про те, як Архімед пообіцяв царю, що зможе зрушити з місця будь-який вантаж, якщо знайде точку опори. Для демонстрації своїх слів він побудував систему блоків – поліспаст, за допомогою якого самотужки зрушив із місця повністю навантажене велике судно. За переказом, саме після цього він промовив свою знамениту фразу: «Дайте мені точку опори, і я переверну Землю».



Архімед перевертає Землю, гравюра 1824 року

Під час Другої Пунічної війни, у 214–212 роках до н. е., Архімед відіграв важливу роль в обороні Сіракуз від римлян. Використовуючи створені ним машини, захисники міста тривалий час успішно відбивали атаки з суші й моря. Римські полководці були вражені ефективністю оборони й були змушені відмовитися від штурму, перейшовши до тривалої облоги.



Томас Ральф Спенс, Архімед керує обороною Сіракуз, 1895 р.

Доля Архімеда трагічно обірвалася під час захоплення міста. Попри наказ римського воєначальника Марцелла пощадити великого вченого, його було вбито солдатом під час штурму. За різними версіями, Архімед або відмовився йти до командира, бажаючи завершити розв’язання задачі, або загинув випадково, або ж був убитий через те, що солдати прийняли його інструменти за коштовності. Ось як пише про це Плутарх у

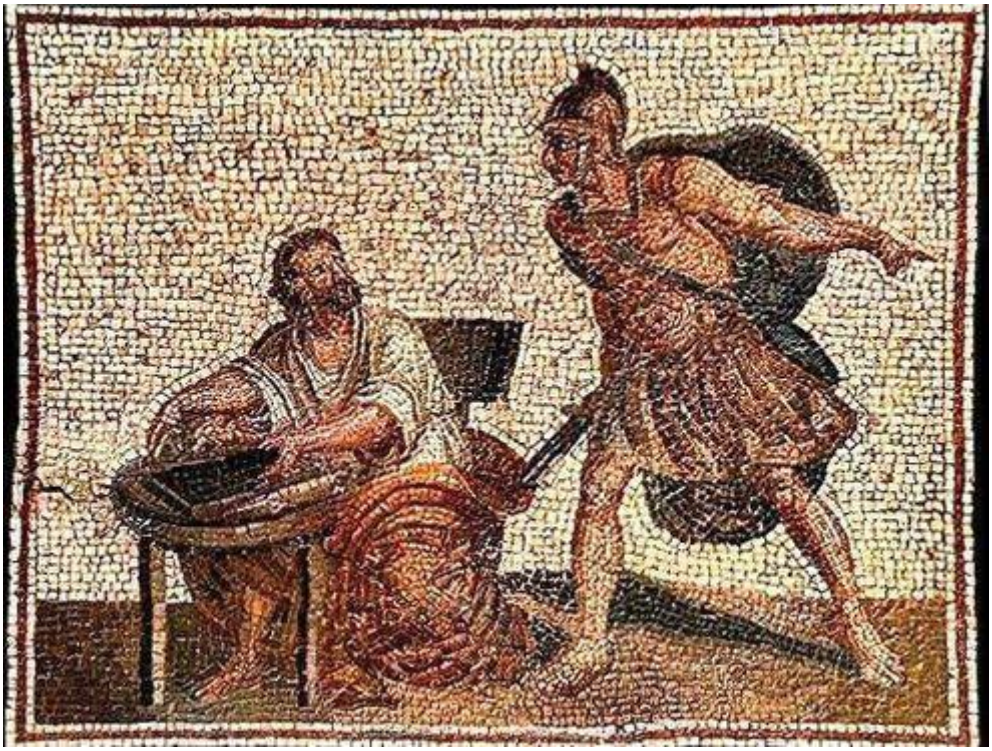
життєписі Марцелла: «Найбільше шкодував Марцелл про смерть Архімеда. Той перебував удома, розглядаючи якусь геометричну фігуру; оскільки він поринув у це дослідження всім своїм розумом і всіма почуттями, то не помічав шуму, який створювали римляни, що бігали туди й сюди, й не знав, що місто вже було у їхніх руках. Раптом перед ним з'явився солдат із наказом іти до Марцелла. Архімед відмовився йти, поки не знайде доведення своєї задачі. Роздратований римлянин вихоплює меч і вбиває його. Інші кажуть, що якийсь солдат кинувся на нього з мечем, щоб убити, а Архімед настійно став просити його почекати трохи, доки він закінчить задачу, але солдат, якому було байдуже до його доведення, пронизав його мечем. Треті кажуть, що Архімед сам ішов до Марцелла, несучи в скриньці математичні інструменти – сонячні квадранти, небесні глобуси та кутоміри для вимірювання видимого розміру Сонця, але солдати, які трапилися йому дорогою, подумали, що він несе в скриньці золото, й убили його, щоб заволодіти цим золотом. У будь-якому разі всі історики визнають, що Марцелл був дуже засмучений смертю Архімеда, уникав убивці як святотатця й, наказавши розшукати родичів Архімеда, милостиво з ними обійшовся.» Навіть через століття цей епізод викликав співчуття й обговорення серед істориків і філософів.



Тома Дежорж, Смерть Архімеда, 1815 р.

За словами Альфреда Норта Вайтгеда, «Смерть Архімеда від рук римського солдата символізує зміну світу першої величини. Греки-теоретики зі своєю любов'ю до абстрактної науки були витіснені в керівництві європейським світом практичними римлянами. Лорд Біконсфілд в одному зі своїх романів визначив практичну людину як людину, що вдосконалює помилки своїх предків. Римляни були великим народом, але вони мали прокляття безплідності, пов'язане з практичністю. Вони не поліпшили знання попередників, не просунулися далі деяких дрібних технічних питань. Вони не були настільки мрійниками, щоб дійти до нових поглядів, які могли б забезпечити більш

фундаментальний контроль над силами природи. Жоден римлянин ніколи не загинув через те, що захопився міркуваннями про математичну діаграму…».



Мозаїка, яку спершу вважали античною, тепер припускають, що це копія або підробка XVIII століття. Центральна частина, представлена тут, має розміри 35 × 27 сантиметрів і оточена рамкою завширшки 8 сантиметрів. Зберігається в Міській галереї Лібіґгауз, Франкфурт-на-Майні, Німеччина.

Цицерон писав у «Тускуланських бесідах», що йому через 137 років після смерті Архімеда вдалося відшукати напівзруйновану могилу вченого. На ній, як і заповідав Архімед, було зображення кулі, вписаної в циліндр.

Відомості про життя Архімеда дійшли до нас завдяки працям таких авторів, як Полібій, Плутарх, Цицерон, Вітрувій, Діодор Сицилійський та інших. Проте майже всі вони писали про нього через століття після його смерті, і тому точність окремих деталей його біографії залишається предметом наукових дискусій.









Зображення Архімеда на поштових марках, створені на основі бюста, що зберігається в Національному музеї Неаполя, Італія.[35]

Відклавши убік фізичні досягнення Архімеда – якими б видатними вони не були, від гвинтового насоса до законів статики та гідростатики, – зосередимося на його внеску в математику. Почнемо з трактату, який довго вважався втраченим, але виявився по-справжньому безцінним для розуміння ходу думки Архімеда – **«Про механічні теореми. Метод, повідомлений Ератосфену»**.



Упродовж багатьох століть цей текст уважали втраченим, доки 1906 року данський філолог Йоганн Людвіг Гейберг не знайшов його в Константинополі у складі палімпсеста – пергаментного рукопису, в якому старий текст було стерто і записано наново.

Хронологічно він, можливо, не перший серед творів Архімеда, але саме в ньому він ділиться механізмом відкриття – тим, як за допомогою наочних і майже інтуїтивних прийомів знаходив площі та об’єми, які згодом строго доводив уже засобами евклідової геометрії.

Архімед подумки розбиває фігури на нескінченно тонкі перерізи, уявляючи їх як сукупності пластинок, і порівнює їхні ваги та моменти відносно уявних важелів.

Першою теоремою, з якої він починає трактат, стає обчислення площі сегмента параболи. Архімед показує, що площа, обмежена дугою параболи й хордою, становить 4/3 від площі трикутника, вписаного під дугу. Ця теорема, згодом доведена ним чисто геометрично в іншому творі, тут з’являється як плід механічного міркування: він урівноважує нескінченно малі ваги на важелі й з рівноваги робить висновок про шукану площу.



Далі йде результат, що став одним із найвідоміших в історії математики. Архімед показує, що об’єм кулі становить 2/3 від об’єму циліндра, описаного навколо неї. Щоб дійти до цього, він розглядає не лише сам циліндр, а й допоміжний – більшого радіуса – та вписаний у нього конус. Порівнюючи площі перерізів цих трьох тіл на однакових висотах, він встановлює рівність об’ємів як суми нескінченно багатьох пластинок.

[35] Насправді цей бюст належить Архідамові III, царю Спарти, III століття до н. е.

Хоча «Метод, повідомлений Ератосфену» унікальний своєю відвертістю й експериментальним духом, Архімед, будучи грецьким математиком, незмінно прагнув до строгого обґрунтування. Ті результати, яких він досягав за допомогою механічних міркувань, він потім доводив за всіма правилами евклідової геометрії. Одним із найяскравіших прикладів такої роботи став трактат «Про кулю і циліндр», у якому Архімед викладає строгі геометричні доведення саме тих теорем, до яких він прийшов раніше завдяки механічному методу.

Твір **«Про кулю і циліндр»** складається з двох великих листів, адресованих Досіфею – другові та, ймовірно, учневі Архімеда. Ці листи написані в ввічливому, але досить особистому тоні, що дозволяє відчути живий голос автора і контекст наукового спілкування в елліністичну добу. У першому листі Архімед обіцяє викласти теорію, пов'язану з тілами обертання, і підкреслює важливість своєї нової теореми: він стверджує, що об'єм кулі становить дві третини від об'єму описаного навколо неї циліндра, а площа поверхні кулі – також дві третини від повної поверхні цього циліндра, включно з його основами.



Для Архімеда цей результат мав особливе значення – настільки, що, як розповідає Цицерон, він заповів вирізьбити на своїй гробниці зображення кулі й циліндра з відповідним співвідношенням їхніх об'ємів, підкреслюючи, що математичне відкриття може бути не лише точним, а й прекрасним у своїй пропорції та глибині.

У другому листі Архімед викладає строгі доведення своїх тверджень. Він використовує метод вичерпування – прийом, що бере початок ще від Евдокса, – і майстерно поєднує його з аналізом геометричних конфігурацій. Архімед розглядає послідовності вписаних і описаних многогранників, щоб «затиснути» об'єм шуканої фігури між двома граничними значеннями. Ця техніка, по суті, є попередницею сучасного поняття границі та інтегрування. Користуючись методом вичерпування, він не лише обчислює об'єми й площі для конкретних тіл, а й виводить закономірності, що справедливі для цілого класу фігур обертання.

Завершується другий лист Архімеда до Досіфея доведенням теореми про те, що серед усіх сферичних сегментів, обмежених рівними поверхнями, найбільший об'єм має півкуля.

Після фундаментального трактату «Про кулю і циліндр» Архімед звертається до інших, не менш витончених геометричних задач, демонструючи разючу винахідливість у дослідженні криволінійних фігур і тіл.

Короткий, але винятково важливий твір **«Вимірювання круга»** присвячений визначенню площі круга. Архімед доводить, що вона дорівнює площі трикутника, основа якого дорівнює довжині кола, а висота – радіусу круга. Іншими словами, він фактично встановлює формулу $S = \pi r^2$, хоча сам символ π у його час ще не використовувався.

Особливо примітно, що Архімед дає оцінку значення числа π, укладаючи його між двома дробами: $223/71 < \pi < 22/7$.

Цей результат було досягнуто шляхом порівняння довжин вписаних і описаних многокутників із дедалі більшою кількістю сторін – по суті, Архімед використовує апроксимацію граничного значення.



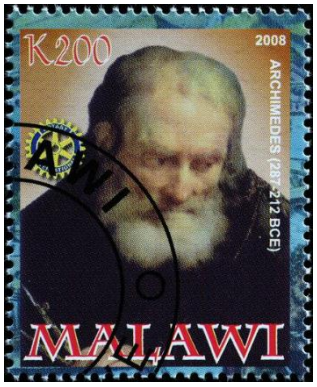
У творі **«Про коноїди й сфероїди»** Архімед досліджує тіла, що виникають при обертанні параболи, гіперболи та еліпса навколо однієї з їхніх осей. Ці фігури – коноїди й сфероїди – складні для геометричного аналізу, оскільки їхня поверхня не є ані площиною, ані складеною з прямолінійних відрізків. Проте Архімедові вдається обчислити їхні об'єми й площі з разючою точністю, знову ж таки застосовуючи метод вичерпування.

Наприклад, він знаходить об'єм частини еліпсоїда, відсіченої площиною, і встановлює співвідношення між об'ємами тіл, утворених різними обертаннями кривих. Ці задачі – по суті – вже потребують уміння працювати з нескінченно малими, і Архімед розв'язує їх засобами суто геометричними, але з майже аналітичною точністю. Сучасною мовою, результати цієї книги рівносильні знаходженню визначених інтегралів $\int_0^a xdx$, $\int_0^a x^2\,dx$ та $\int_0^a (x^2+bx)dx$.

Фактично, у згаданих працях Архімед застосував метод верхніх і нижніх інтегральних сум (тепер відомих під назвами суми Рімана і Дарбу).

Твір **«Про спіралі»** присвячений спіралі, яку нині називають спіраллю Архімеда – кривій, що виникає при рівномірному обертанні точки з одночасним рівномірним віддаленням від центра. Архімед не лише дає визначення цієї кривої, а й досліджує її властивості: він знаходить площу, обмежену одним витком спіралі, та виводить низку інших геометричних характеристик, пов'язаних із дотичними та січними до спіралі.

Особливість цього трактату – його новизна. Архімед уперше вводить у математичний розгляд криву, не пов'язану з прямими геометричними побудовами. Робота зі спіраллю вимагає вміння аналізувати рух, швидкість зміни відстаней – і це робить «Про спіралі» унікальним твором, у якому зароджуються ідеї майбутнього диференціального числення.



У трактаті **«Квадратура параболи»** Архімед розв'язує задачу, яку вважав однією з найпрекрасніших: знаходження площі сегмента, обмеженого параболою та хордою. Він показує, що ця площа становить дві третини площі трикутника, побудованого на тій самій хорді та дотичній до параболи. Розв'язання ґрунтується на методі вичерпування, причому Архімед, по суті, підсумовує нескінченну геометричну прогресію – задовго до появи відповідного формального апарату.

Збірка **«Книга лем»** (збережена лише в арабському перекладі) складається з п'ятнадцяти тверджень геометричного характеру. Хоча достовірність авторства Архімеда викликає дискусії, зміст книги цілком узгоджується з його стилем. У «Книзі лем» розглядаються задачі, пов'язані з колами, січними, дотичними, відношеннями площ і довжинами відрізків. Деякі з цих задач можна вважати підготовкою до більших результатів Архімеда в інших творах.

В незвичному трактаті **«Обчислення піску»** Архімед відходить від звичної геометрії й звертається до арифметики. Він ставить, на перший погляд, дивне запитання: скільки піщинок умістилося б у Всесвіті? Щоб відповісти на нього, Архімед створює особливу числову систему, яка дозволяє працювати з надзвичайно великими числами – аж до 10^{63}. Цей твір – зразок математичної філософії: Архімед не просто дає кількісні оцінки, а й розмірковує про природу числа й нескінченності, про межі мислимого й уявного. У цьому трактаті він також подає уточнене значення радіуса земної орбіти та згадує геліоцентричну систему Арістарха.

Трактат про напівправильні многогранники Архімеда не зберігся, але про нього повідомляє Папп Александрійський у п'ятій книзі своїх «Математичних зборів». За словами Паппа, Архімед дослідив 13 напівправильних многогранників – тіл, складених із правильних многокутників різних типів. Ці тіла згодом отримали назву архімедових тіл, на відміну від платонових тіл, відомих ще в античності. Архімед, вочевидь, першим систематично вивчив їхні властивості, започаткувавши цілий розділ геометрії, пов'язаний із симетрією та просторовими формами.



Спадщина Архімеда простягається далеко за межі творів, що дійшли до нас. Його ім'я пов'язують із низкою математичних результатів, які, можливо, були викладені в утрачених працях або передавалися усно.

Теорема Архімеда про ламану, вписану в коло, зберіглася, зокрема, в передачі арабського математика Аль-Біруні. У ній ідеться про довжину ламаної, що наближає коло: Архімед подає оцінку, подібну до тих, які він застосовував у «Вимірюванні кола».

Формула Герона для обчислення площі трикутника за трьома сторонами (сформульована Героном лише через кілька століть) іноді приписується Архімедові. Хоча прямого підтвердження цьому немає, характер міркувань і технічний рівень цілком відповідають його стилю.

Розв'язання **задачі про трисекцію кута**, неможливої за допомогою циркуля і лінійки, Архімед дав за допомогою особливої механічної кривої – не що інше, як згадана вище спіраль, яку тепер називають спіраллю Архімеда. Ця спіраль описується так: якщо точка рівномірно рухається вздовж прямої, що обертається з постійною кутовою швидкістю навколо свого початку, то вона опише спіраль. У сучасних координатах (полярних) її рівняння має вигляд $r = a\theta$, де r – відстань від початку координат (полюса), θ – кут повороту, а a – певна стала.

Розгляньмо, як саме Архімед використав спіраль для трисекції. Припустімо, дано кут $\angle AOB$. Щоб поділити його на три рівні частини, треба виконати такий алгоритм:

1. Побудувати спіраль Архімеда з центром у точці O і променем OA, уздовж якого точка починає рухатися по спіралі.
2. Знайти точку перетину P променя OB із цією спіраллю.
3. Провести коло з центром у O і радіусом OP. Це коло перетне спіраль ще в одній або кількох точках. Серед цих точок можна знайти такі, що відповідні промені OP_1, OP_2 ділять $\angle AOB$ на три рівні частини.

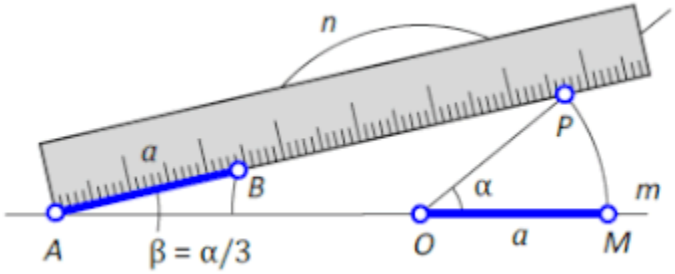
Чому це працює? Річ у тім, що в спіралі радіус залежить лінійно від кута – отже, поділ дуги спіралі на три рівні відрізки за довжиною автоматично приводить до поділу кута при вершині на три рівні частини.

Цей спосіб не задовольняв вимогам строгої класичної геометрії, де дозволені лише циркуль і лінійка, оскільки сама спіраль не може бути побудована цими засобами. Проте Архімед показав, що задача має розв'язок, якщо розширити арсенал геометричних інструментів.

Архімед знайшов і ще один витончений метод розв'язання задачі трисекції кута, заснований на розширенні допустимих геометричних побудов – так званий метод невсиса.

Термін невсис в античній геометрії позначає особливу конструкцію, коли проводиться пряма, що одночасно задовольняє кільком умовам. У класичній задачі метод невсиса полягає у проведенні відрізка через задану точку так, щоб він перетинав дві інші криві (або прямі) за певних умов – наприклад, під визначеними кутами чи торкаючись кола.

Цю побудову неможливо здійснити лише циркулем і лінійкою в евклідовому сенсі, але її вважали припустимою в ширшому античному арсеналі – і Архімед не вагався нею користуватися.



Припустімо, маємо кут α. Необхідно побудувати кут β, величина якого втричі менша за даний: α = 3β. Побудуємо коло довільного радіуса a з центром у точці *O*. Нехай сторони кута перетинають коло в точках *P* і *M*. Продовжимо сторону *OM* вихідного кута. Візьмемо лінійку невсиса, відкладемо на ній відстань *a* і, використовуючи пряму *OM* як напрямну, точку *P* як полюс, а півколо як цільову лінію, будуємо відрізок *AB*. Отримаємо кут $\angle PAM$, рівний третині початкового кута *α*.

Це розв'язання використовує тонке спостереження про зв'язок відносного розташування точок і дуг кола. Відрізок, побудований за допомогою невсиса, забезпечує потрібне співвідношення довжин, яке в звичайній геометрії не може бути отримане лише циркулем і лінійкою. Саме тому Архімед вдається до більш «вільної» конструкції.

Архімед не обмежував себе аксіомами Евкліда. Він був готовий розширити набір інструментів, якщо це дозволяло ефективно розв'язувати задачі. Його підхід показує, що вже в античності математики розуміли: обмеження інструмента – не завжди обмеження розуму. У цьому Архімед значною мірою передбачає ідеї пізнішої алгебраїчної та конструктивної геометрії.

Побудова правильного семикутника – ще один результат, пов'язаний з ім'ям Архімеда. Він, вочевидь, першим знайшов наближену конструкцію, що дозволяла

поділити коло на сім рівних частин, попри те, що точне побудування за допомогою класичних інструментів неможливе.

Архімед залишив по собі не просто окремі результати, а зразок мислення, у якому здивування перед природою поєднується з строгою логікою доведення. З Архімедом завершується героїчна доба математики елліністичної епохи. Після нього грецька наука не зникає, але її розвиток дедалі частіше відбувається за інерцією, і лише зрідка з'являється постать співмірного масштабу.

Однією з таких постатей був Ератосфен – людина надзвичайно різнобічна, якій судилося поєднати науку, мистецтво та державну службу в єдине ціле.

Ератосфен Киренський

Ератосфен – постать не менш визначна, ніж Архімед, хоча й зовсім іншого складу. Якщо Архімед був передусім генієм математики й механіки, то Ератосфен – універсальний учений, один із перших справжніх енциклопедистів.



Ім'я Ератосфена сьогодні відоме передусім завдяки вимірюванню земної кулі за допомогою тіні від жердини. Проте це було лише одне з багатьох досягнень цього видатного мислителя III століття до н. е., сучасника й, імовірно, друга Архімеда.

Ератосфен був людиною рідкісного масштабу: математик, географ, астроном, історик, літературознавець і бібліотекар – він увійшов в історію як той, кому вперше вдалося поєднати різні галузі знань. В Александрійській бібліотеці, де він довгий час був хранителем, Ератосфен зібрав і систематизував величезну кількість відомостей, заклавши основи наукової географії та картографії. Саме йому ми завдячуємо введенням понять широти й довготи, а також першим накресленням координатної сітки на мапі тодішнього відомого світу.

А й у математиці він залишив слід – достатньо згадати «решето Ератосфена», алгоритм для знаходження простих чисел, і його геніальний розрахунок довжини екватору Землі, заснований на суто геометричних міркуваннях та спостереженнях за положенням Сонця.

Ератосфен Киренський народився близько 276 року до н. е. в місті Кирена, на території сучасної Лівії. Він належав до того покоління грецьких учених, що формувалося в атмосфері активного культурного обміну й наукового пошуку, характерного для елліністичного світу. Освіту здобув, ймовірно, спочатку на батьківщині, потім в Афінах, де слухав лекції стоїків і платоніків, а згодом перебрався до Александрії – інтелектуальної столиці античного світу.

Своєю науковою кар'єрою Ератосфен багато в чому завдячує покровительству Птолемея III, який запросив його очолити Александрійську бібліотеку – одну з найбільших наукових установ того часу. Цю посаду він обіймав близько сорока років. Саме тут, серед тисяч сувоїв, Ератосфен розгорнув свою діяльність. Він активно займався

розширенням і розвитком бібліотеки. На його прохання александрійська портова влада вилучала всі книги з прибулих кораблів для вивчення й копіювання.

У старості в Ератосфена запалилися очі, що згодом призвело до сліпоти. Неможливість читати й спостерігати природу тяжко пригнічувала його, і в 194 році до н. е. він вирішив заморити себе голодом.

Унікальність Ератосфена полягала в широті його інтересів: він займався поезією та літературною критикою, писав трактати з філософії й хронології, вивчав астрономію та математику, географію й музику. Сучасники прозвали його «Пентаграфом» – людиною, обізнаною у п'яти науках, або «пентатлом» (п'ятиборцем). Однак сам Ератосфен називав себе скромно: «філолог», що тоді означало не лише знавця мови, а й людину, яка шукає знання в усіх його формах.

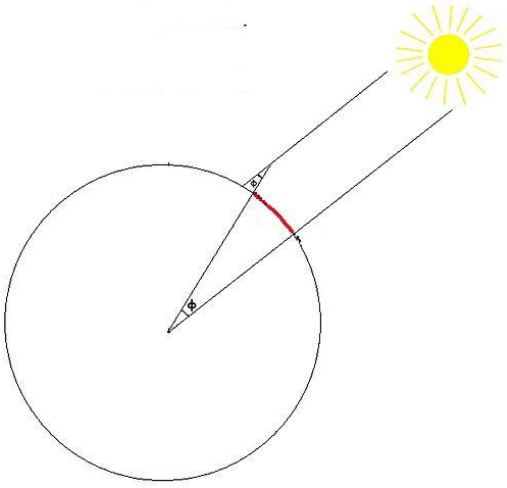
Одним із найвражаючих досягнень Ератосфена стало вимірювання довжини земного меридіана – іншими словами, визначення окружності Землі. Це була не просто блискуча наукова здогадка: Ератосфен зміг отримати результат із дивовижною точністю, використовуючи виключно спостереження та геометричні міркування.

Ключ до відкриття полягав у спостереженні за положенням Сонця в день літнього сонцестояння. Ератосфен дізнався про незвичайне явище, що відбувалося в місті Сієна (сучасний Асуан) на півдні Єгипту: опівдні в цей день Сонце освітлювало дно глибокого колодязя, не відкидаючи тіні. Це означало, що сонячні промені падали строго вертикально – Сієна розташована майже на тропіку, тобто на тій широті, де Сонце може перебувати точно в зеніті.

В Александрії, що розташована на північ від Сієни, такого не відбувалося – вертикальні предмети відкидали тінь навіть опівдні в день сонцестояння. Ератосфен зрозумів, що ця різниця викликана кривизною Землі, і вирішив використати її для вимірювання її окружності.

У 240 році до н. е., у день сонцестояння, він встановив вертикальну жердину (гномон) в Александрії та виміряв кут між жердиною та падаючою тінню. Отримане значення становило приблизно 7,2 градуса, що відповідає 1/50 частині повного кола.

Щоб знайти довжину всієї окружності Землі, Ератосфену потрібно було знати відстань між Сієною та Александрією. Він оцінив її як 5000 стадіїв (приблизно 800 км). Цей результат він отримав, спираючись на середній час, за який каравани на верблюдах долали цю відстань, а також використовуючи дані «ходячих» – спеціалістів, що вимірювали відстані кроками.



Математичне міркування Ератосфена базувалося на властивостях паралельних прямих і відповідних кутів: сонячні промені, що падали вертикально в Сієні, можна вважати такими, що проходять через центр Землі. В Александрії вони утворюють кут φ із поверхнею, і цей кут дорівнює центральному куту між двома радіусами Землі – від центру до Александрії та до Сієни. Таким

чином, якщо 7,2 градуса – це 1/50 частина окружності, то вся окружність повинна бути в 50 разів більшою за відстань між містами.

Помноживши 5000 стадіїв на 50, Ератосфен отримав окружність Землі: 250 000 стадіїв. Пізніше він уточнив її до 252 000 стадіїв, щоб це число зручно ділилося на 60 (як було прийнято у вавилонській системі числення).

Точно не відомо, який саме тип стадію використовував Ератосфен, а від цього залежить точність його результату у сучасних одиницях. Якщо це був аттичний стадій (~185 м), то довжина окружності Землі за його розрахунками становила б приблизно 46 600 км. Якщо ж він використовував так званий «одойпоричний» стадій (~157,5 м), то результат складав би близько 39 700 км – приголомшливо близько до сучасного значення (~40 075 км по екватору).

У будь-якому разі суть відкриття залишається вражаючою. Ератосфен першим в історії не лише довів, що Земля куляста, а й виміряв її розмір, спираючись виключно на спостереження, логіку та геометрію. Його метод поклав основу всієї подальшої географії та геодезії, а саме вимірювання стало одним із перших прикладів застосування наукового мислення у глобальному масштабі.

Для свого часу це було відкриття, порівнянне за значенням із подорожжю навколо світу: Земля стала вимірною, оглядовою, підконтрольною числу й логіці.



Мабуть, найвідомішим його внеском у математику став метод, який і сьогодні вивчають школярі – «решето Ератосфена». Це був алгоритм для знаходження простих чисел, тобто таких, що діляться лише на 1 та на самих себе.

Метод простий: якщо послідовно викреслювати всі кратні кожного наступного простого числа з таблиці натуральних чисел, починаючи з 2, залишаються лише прості. Наприклад, спочатку видаляються всі парні числа (крім 2), потім усі числа, що діляться на 3, потім – на 5, 7 і так далі.

Цей спосіб виявився не лише дуже ефективним – він став прикладом алгоритмічного мислення. По суті, це один із перших відомих алгоритмів в історії математики: чітка, повторювана процедура, яку можна описати крок за кроком. Це робить його актуальним навіть у контексті сучасного програмування та теорії обчислень.

Ератосфен також займався проблемою подвоєння куба. Він запропонував механічний розв’язок, що використовув не лише абстрактні побудови, а й практичні інструменти. Ератосфен розробив спеціальний пристрій – щось на кшталт лінійки з рухомими напрямними – за допомогою якого можна було геометрично побудувати відрізок, рівний кубічному кореню з 2. Він був настільки гордий своїм рішенням, що навіть виклав його у віршах:

Друже, якщо хочеш малий куб удвічі збільшити

І кожну форму твердого тіла легко змінити,

Це під силу тобі, навіть якщо сховище або глибокий колодязь

Вирішиш міряти – бери середні лінії двох суміжних планок.

Не шукай у важких циліндрах Архіта,

Не в тріадах Менехма з коничними перетинами,

Ані в вигнутих лініях божественного Евдокса.

З цими таблицями ти можеш побудувати тисячі пропорцій,

Навіть почавши з нуля – усе вдасться легко.

Благословенний будь, Птолемею, батьку, що оживився разом із сином,

Усі добрі діла, даровані Музам і царям – вони твої.

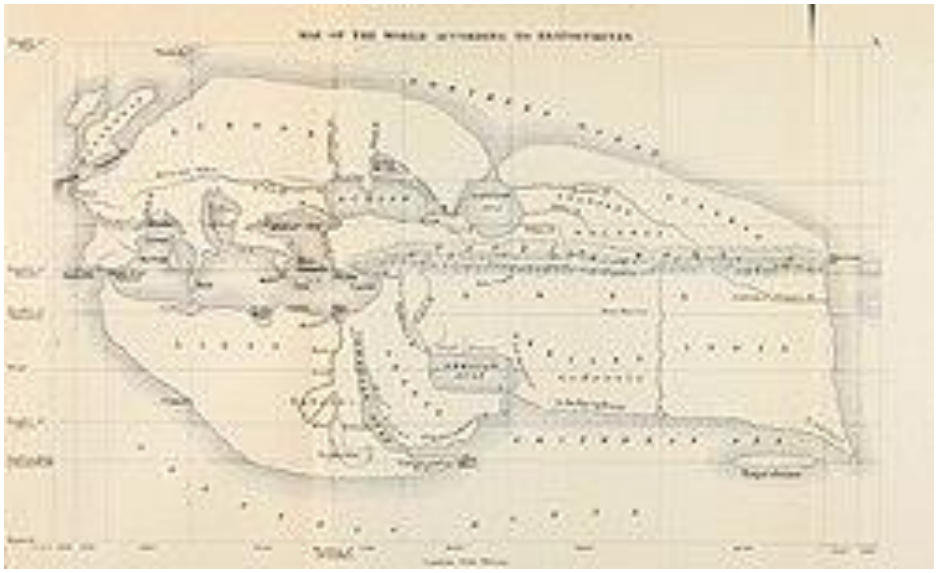
І нехай, на старості літ, небесний Зевс

Скіпетр у руки твої покладе.

Хай здійсниться все це, і кожен, хто дивиться на пам’ятку,

Скаже: «Це Киренця син, Ератосфен, таке створив».

Не менш значущим був внесок Ератосфена у становлення географії як математичної дисципліни. Він першим ввів саме слово «географія», запропонувавши розглядати Землю не як хаотичне поєднання країн і народів, а як просторову систему, підпорядковану законам. Він запропонував ділити поверхню земної кулі за допомогою паралелей і меридіанів. Для визначення положення на Землі він пропонував використовувати широту й довготу, а також намагався класифікувати кліматичні зони на основі кута падіння сонячних променів і тривалості дня. Це був важливий крок у бік кількісної географії, де простір описується через числа й вимірювання.



Карта світу за Ератосфеном, реконструкція XIX ст.

Завдяки Ератосфену географія вперше стала наукою.

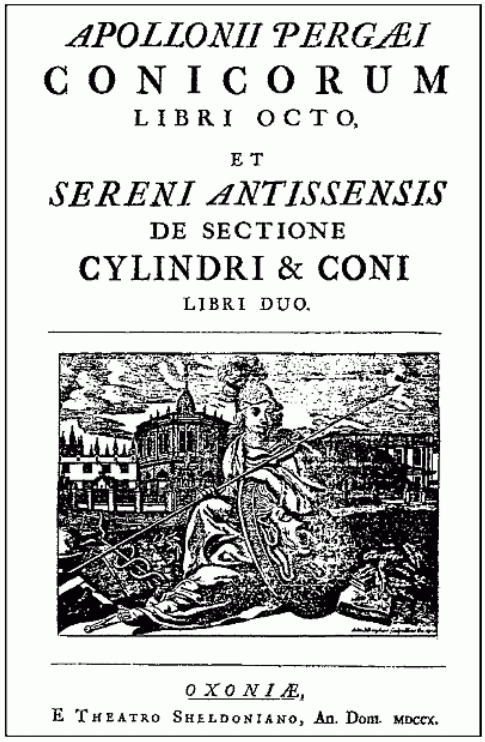
Аполлоній Перзький

Після Ератосфена на авансцену грецької науки виходить постать, чиї праці з геометрії та астрономії вплинули на розвиток математики не менше, ніж твори Архімеда й Евкліда. Це Аполлоній із Перги – людина, чиє ім'я назавжди пов'язане з конічними перетинами, еліпсами та гіперболами, але чий вплив виходить далеко за межі однієї теми.



Аполлоній народився близько 260 року до н. е. (за іншими джерелами – між 246 і 221 роками до н. е.) у місті Перга в Памфілії, на південному узбережжі Малої Азії, неподалік від сучасної Анталії. Освіту він здобув в Александрії, де працював у традиції школи Евкліда. Згодом сам став викладачем у знаменитому Мусейоні – місці, де збиралися найкращі уми свого часу. За викладання у так званій «п'ятій аудиторії» він отримав прізвисько Аполлоній П'ятий.

Сучасники бачили в ньому неабиякого математика, здатного не лише засвоювати й передавати знання, а й критично їх переосмислювати. Збереглися згадки про те, що він піддавав сумніву висновки самого Евкліда, пропонував уточнення й альтернативні доведення. За це Папп Александрійський, математик III ст. н. е., описував його як гордовиту людину, схильну недооцінювати колег. За переказами, саме пихатість Аполлонія підштовхнула Архімеда жартома надсилати в Александрію навмисно складні або хибні теореми – щоб перевіряти «самовпевнених професорів».


APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,
ET
SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE
CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.
OXONIÆ,
E Theatro Sheldoniano, An. Dom. mdccx.

Втім, за цими суперечками проглядає важливий момент: Аполлоній належав до покоління вчених, яке не боялося переглядати фундаментальні принципи та шукати нові форми знання. Саме йому належить заслуга в тому, що терміни «еліпс», «гіпербола», «парабола» стали математичними поняттями. До нього, наприклад, Архімед називав параболу просто «перетином прямого конуса».

Серед його математичних досягнень – розв'язання Делійської задачі (подвоєння куба), але не за допомогою циркуля й лінійки, а через перетин кола й гіперболи. Він також сформулював і розв'язав так звану задачу Аполлонія – знайти коло, дотичне до трьох заданих кіл. Цією задачею займалися протягом століть, і вона стала класикою геометрії.

Але головною працею Аполлонія залишається монументальний трактат «Конічні перетини», що складався з восьми книг, із яких до нас дійшли повністю чи частково лише сім. Цей твір став вершиною давньогрецької геометрії й справив величезний вплив на подальшу математику – від арабських учених до Декарта й Кеплера.

У «Конічних перетинах» Аполлоній уперше системно визначає параболу (перетин, паралельний твірній конуса), еліпс (перетин, нахилений менше, ніж твірна), і гіперболу (перетин, нахилений більше, ніж твірна). Ця геометрична класифікація замінила більш обмежені підходи. Він увів важливий інструмент симетрії та аналізу коніки: діаметр коніки як пряму, що проходить через середини паралельних хорд. В еліпсі й гіперболі можливі різні діаметри для різних напрямів хорд. Для кожної системи паралельних хорд є спряжений діаметр. Діаметри можуть бути взаємно спряженими – це аналог майбутніх понять ортогональності та координатних осей. Еліпс і гіпербола мають центр симетрії – точку перетину спряжених діаметрів. У параболи центру немає. Уперше введено й досліджено асимптоти як граничні напрями віток гіперболи. Асимптоти проходять через центр гіперболи й визначають її поведінку на нескінченності. Геометрично побудовано дотичні до конік. Вивчено умови існування двох дотичних із зовнішньої точки – фактично передбачення понять дотику й похідної. Аполлоній розглядає можливі точки перетину двох конік – до 4 у загальному випадку, що є ключовим кроком у бік алгебраїчної геометрії. Він уміє будувати коніку, що проходить через задані точки й дотикається до заданих прямих – без координат, суто геометрично.

Після Архімеда, Ератосфена й Аполлонія настає період поступового занепаду грецької математики. Уже в I ст. до н. е. помітно слабшає інтерес до активних математичних досліджень. Центри наукового життя переміщуються, втрачається спадковість шкіл, зменшується кількість оригінальних праць. Наступні автори частіше виступають у ролі коментаторів і компіляторів, а не творців нових теорій. Коротко розглянемо деякі результати цього часу.

Нікомед

В історії античної математики є чимало визначних постатей, чиї імена відомі лише завдяки згадкам у пізніших авторів. Одним із таких математиків був Нікомед, що жив у



III ст. до н. е., приблизно між 280 і 210 роками до н. е. Хоча про його життя майже нічого не відомо, збережені відомості про його праці дозволяють віднести його до числа найяскравіших і найоригінальніших мислителів свого часу.

Нікомед жив і працював у добу, коли геометрія досягла особливих висот: після Евкліда, але ще до розквіту праць Архімеда й Аполлонія Перзького. Із наявних свідчень відомо, що Нікомед різко критикував Ератосфена за його метод подвоєння куба. З іншого боку, Аполлоній Перзький уже знав про роботу Нікомеда й згадував його криву – конхоїду – у своїх творах.

Це дозволяє з високою ймовірністю датувати діяльність Нікомеда серединою III ст. до н. е.

Нікомед присвятив свої дослідження головним чином трьом класичним задачам давнини: подвоєнню куба (т. зв. Делійська задача), трисекції довільного кута та квадратурі круга.

Усі ці задачі були нерозв'язними лише за допомогою циркуля та лінійки, що на той час уже починали підозрювати багато геометрів. Однак Нікомед не змирився з обмеженнями й шукав нові шляхи розв'язання – через побудову нестандартних кривих, які виходили за межі «чистої» евклідової геометрії. Його найвідомішим відкриттям стала крива, названа пізніше конхоїдою Нікомеда. Назва походить від грецького слова κογχοειδής – «подібний до мушлі». Конхоїда будується за допомогою механізму, що дозволяє, по суті, «утримувати» сталу відстань від заданої прямої під час руху вздовж іншої лінії. Це незвичне геометричне місце точок дає змогу, зокрема, розв'язати задачу трисекції кута – тобто поділити довільний кут на три рівні частини.

Нікомед розробив не лише опис цієї кривої, а й механізм для її побудови, а також, як повідомляв Папп Александрійський, класифікував три різні типи конхоїд, хоча до нас не дійшло, які саме різновиди він мав на увазі. Ось як Папп описував його внесок: «Нікомед поділив на три рівні частини будь-який кут із прямолінійними сторонами, використовуючи конхоїдальні криві, чию конструкцію, порядок і властивості він описав, будучи їхнім першовідкривачем».

Іншим напрямом його роботи була квадратура круга – побудова квадрата, рівного за площею даному колу. Це ще одна задача, нерозв'язна засобами класичної геометрії. Нікомед, як і Діностратo до нього, вдався до використання так званої квадратриси – особливої кривої, що виникає при рівномірному обертанні променя та рівномірному русі точки вниз уздовж осі. За свідченнями Паппа й Евтокія, Нікомед користувався варіантом квадратриси Гіппія, яку іноді називають квадратрисою Нікомеда.

Евтокій писав, що Нікомед із гордістю протиставляв свою криву складному механічному методу Ератосфена для знаходження середніх пропорційних – ключового елемента в розв'язанні задачі подвоєння куба. Він вважав цей метод чужим духові геометрії й непрактичним. Нікомед, навпаки, прагнув зберегти строгість і наочність геометричних побудов, хай навіть із використанням нестандартних кривих.

Цікаво, що Нікомед, попри всю свою новаторську сміливість, залишався переконаним прихильником геометричної строгості. Тоді як Архімед чи Ератосфен застосовували більш «інженерні» або числові методи, Нікомед вірив у геометрію як чисте мистецтво міркування та побудови і в цьому сенсі продовжував лінію Евкліда. Його критика методів Ератосфена була пов'язана не з особистими антипатіями, а з глибокою філософською незгодою щодо того, що слід вважати допустимим методом у математиці.

Діокл

У другій половині III ст. до н. е. жив і працював грецький математик Діокл (бл. 240 – бл. 180 до н. е.). Про його біографію відомо вкрай мало. Судячи з наявних свідчень, він був

сучасником Аполлонія Перзького і, ймовірно, жив і працював в Александрії. Інколи його також називають Діоклом із Карістоса – за назвою міста на острові Евбея.

Ім'я Діокла передусім пов'язують із його твором «Про запалювальні дзеркала», від якого до наших днів дійшли лише уривки – головним чином у коментарях Евтокія до трактату Архімеда «Про кулю та циліндр». Попри скромний обсяг збереженого матеріалу, вплив робіт Діокла на подальший розвиток науки виявився досить значним.

Головною темою трактату були властивості особливих увігнутих дзеркал, здатних фокусувати сонячні промені в одну точку. Саме завдяки цій здатності їх називали «запалювальними» – у буквальному сенсі слова: за сприятливих умов такі дзеркала могли підпалювати предмети. Діокл став першим відомим ученим, який довів фокусну властивість параболічного дзеркала. У своїй роботі він сформулював і довів 16 теорем, багато з яких спиралися на використання конічних перетинів – еліпсів, парабол, гіпербол. Такий підхід, що бере початок від Евкліда й Аполлонія, дозволяв точно описувати поведінку променів у відбивних поверхнях.

Інтерес Діокла до запалювальних дзеркал виявився пов'язаним і з іншими важливими геометричними задачами. Наприклад, в одному з уривків його трактату міститься оригінальне розв'язання задачі, сформульованої Архімедом, але не розв'язаної ним (або ж розв'язок не дійшов до нас): як розділити кулю площиною так, щоб об'єми отриманих частин відносилися один до одного в заданій пропорції. Розв'язок Діокла ґрунтувався на строгих геометричних міркуваннях і довгий час залишався єдиним відомим варіантом.

Однак найяскравішим внеском Діокла в античну математику стала його участь у розв'язанні знаменитої задачі про подвоєння куба. Як і деякі його попередники (зокрема, Нікомед), Діокл підійшов до цієї задачі за допомогою нової геометричної кривої – цисоїди. Ця крива третього порядку будувалася на основі перетину двох рухомих відрізків і дозволяла розв'язувати не лише класичну задачу знаходження одного середнього пропорційного між двома відрізками, а й більш загальну – про вставку двох середніх пропорційних. Остання задача тісно пов'язана з розв'язком певного виду кубічного рівняння.

Робота з цисоїдою Діокла відображає характерний для елліністичної математики зсув від класичних побудов (лінійка й циркуль) до використання складніших, штучно сконструйованих кривих, спеціально призначених для розв'язання задач, що не допускають елементарних методів. Цю лінію, започатковану Нікомедом із його конхоїдою, Діокл розвинув далі.

Особливого значення праці Діокла набули в середньовічному ісламському світі. Його твір став відомим арабським математикам і особливо сильно вплинув на Ібн ал-Хайсама (Альхазена) – видатного оптика й мислителя X–XI ст. У його трактаті про запалювальні дзеркала ідеї Діокла посіли центральне місце й були переосмислені у світлі нових уявлень.

Зенодор

У II столітті до н. е., у часи, коли антична наука поступово переходила від блискучих відкриттів Архімеда до більш систематичних узагальнень, жив і працював грецький

математик Зенодор (близько 200 – 140 до н. е.). Його батьківщиною вважають Пеанію поблизу Афін. Про життя відомо небагато: збереглися згадки, що він був знайомий з математиком Філонідом із Лаодикеї та здійснював наукові поїздки, зокрема до Афін і Аркадії.

Сучасники вважали Зенодора не лише геометром, але й астрономом. Про нього згадує Діокл у трактаті «Про запалювальні дзеркала», де пише, що Зенодор цікавився властивостями відбиття сонячних променів у ввігнутих дзеркалах.

Найважливішою працею Зенодора був трактат «Про ізоперіметричні фігури», що, на жаль, не дійшов до нашого часу. Однак чимало його результатів відомо завдяки коментарям Теона Александрійського до «Альмагеста» Птолемея. У центрі досліджень Зенодора стояло питання: яка фігура з даним периметром (або поверхнею) має найбільшу площу (або об’єм)?

Зенодор довів низку теорем, серед яких:

Серед правильних многокутників із однаковим периметром найбільшу площу має той, що має більше сторін.

Якщо коло й правильний многокутник мають однаковий периметр, то коло охоплює більшу площу.

Серед усіх многокутників з однаковим числом сторін і однаковим периметром найбільшу площу має правильний многокутник.

Із цих результатів випливало головне твердження: серед усіх плоских фігур із заданим периметром найбільшу площу має круг. Для античної математики це був значний крок уперед — уперше подібні співвідношення отримали обґрунтування на основі строгих геометричних міркувань.

Зенодор досліджував і просторові тіла. Він стверджував, що:

Тіло, утворене обертанням правильного многокутника з парним числом сторін навколо його найбільшої діагоналі, має менший об’єм, ніж сфера з тією ж поверхнею.

Кожне з п’яти Платонових тіл (тетраедр, куб, октаедр, додекаедр, ікосаедр) вміщує менший об’єм, ніж сфера з однаковою поверхнею.

Нарешті, він висловив — хоч і без доведення — ідею, що серед усіх тіл із заданим об’ємом мінімальну поверхню має сфера. Це твердження стало класичним формулюванням ізоперіметричної задачі у просторі, розв’язання якої знайшли лише в новий час.

Завдяки цим міркуванням Зенодора іноді називають «провісником варіаційного числення» — галузі математики, яка згодом вивчатиме оптимальні форми та функції. Така оцінка, зокрема, належить видатному грецькому математику XX століття Константину Каратеодорі.

Цікаво, що джерела згадують і доньку Зенодора — Піфаїс, яка брала участь у його науковій діяльності, допомагаючи з обчисленнями площ на різних поверхнях. Це один із небагатьох засвідчених випадків участі жінки в математичних дослідженнях античності.

Інтуїтивна суть задач, що цікавили Зенодора, була відома ще в глибоку давнину — про що нагадує одна з найвідоміших легенд античності.



Джованні Баттіста Піттоні, Дідона при заснуванні Карфагена, початок 1720-х рр.

За переказом, фінікійська принцеса Дідона, втікаючи з Тіра, висадилася на північному узбережжі Африки й попросила у місцевого вождя стільки землі, скільки можна охопити бичачою шкурою. Вона розрізала шкуру на тонкі смужки, зв'язала їх у довгу нитку й обвела дугу біля берега моря, замкнувши простір між нею та лінією узбережжя. Так постало місто Карфаген.

Цей міф фактично є наочною ілюстрацією ізоперіметричної задачі: яка фігура з фіксованим периметром охоплює найбільшу площу? Як показав Зенодор, відповідь — коло. Дуга, прокладена Дідоною вздовж берега, відтворювала цю оптимальну форму, забезпечуючи максимальну територію для нового міста.

Таким чином, антична легенда і строгі математичні доведення несподівано перегукуються: інтуїтивний розв'язок стає предметом науки, а відкриття Зенодора — мостом від міфу до геометрії.

Гіпсикл Александрійський

Про життя Гіпсикла (бл. 190 – 120 до н. е.) відомо лише те, що він жив і працював в Александрії у II ст. до н. е. Гіпсикла вважають автором чотирнадцятої книги «Начал» Евкліда – доповнення до тринадцяти знаменитих книг, складених самим Евклідом. Ця

книга присвячена порівнянню двох правильних многогранників: додекаедра й ікосаедра, вписаних в одну й ту ж сферу.

Гіпсикл починає свою працю зверненням до певного Протарха, де розповідає, що його батько та Василід із Тіра вивчали в Александрії трактат Аполлонія Перзького «Про порівняння додекаедра з ікосаедром»:

«[Вони] дійшли висновку, що Аполлоній виклав це неправильно, і самі написали виправлений текст… Згодом і мені трапилася інша книга Аполлонія, яка містила деяке доведення, що стосується вищесказаного, і я з великим захопленням зайнявся дослідженням цієї задачі. Тепер, як видається, кожен може ознайомитися з книгою Аполлонія, бо вона поширена в більш ретельно написаній редакції; а я, написавши у вигляді коментаря все, що вважав за потрібне, вирішив звернутися до тебе».

Згодом сам Гіпсикл знайшов іншу, більш точну редакцію трактату Аполлонія й на її основі написав власний коментар, який і став XIV книгою.

У книзі доводяться вісім теорем, головною з яких вважається восьма: відношення площ поверхонь додекаедра й ікосаедра, вписаних в одну сферу, дорівнює відношенню їхніх об’ємів, а саме $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}$.

Хоч XIV книга й не належить самому Евкліду, її включення до «Начал» відображає прагнення александрійської школи довести геометричні знання до найвищої повноти – особливо в дослідженні Платонових тіл, що мали велике значення для античної космології.

Друга збережена праця Гіпсикла має астрономічний характер і називається «Про сходження». Це короткий трактат, що складається всього з шести тверджень, але має велике значення: він присвячений обчисленню часу, за який кожен знак зодіаку сходить чи заходить над горизонтом залежно від широти спостерігача – зокрема, для Александрії.

Це було особливо важливо для астрологів: від часу сходження знака залежав гороскоп. Але у Гіпсикла ще не було інструментів сферичної тригонометрії, якими користувався, наприклад, його сучасник Гіппарх. Тому він вдавався до наближених методів – і саме тут виявилася його оригінальність: він використовував многокутні числа.

Саме з многокутними числами – узагальненням фігурних чисел (трикутних, квадратних тощо) – пов’язане ще одне досягнення Гіпсикла. Ця його праця не збереглася повністю, але в «Арифметиці» Діофанта цитуються такі правила: якщо взяти ряд чисел із сталою різницею, то при різниці 1 сума буде трикутним числом, при 2 – квадратним, при 3 – п’ятикутним і так далі. Таким чином, Гіпсикл дав загальне визначення многокутного числа як суми арифметичної прогресії, де різниця дорівнює числу сторін многокутника мінус 2.

Найбільшу історичну відомість Гіпсикл отримав завдяки одній деталі, що ввійшла у щоденну практику всіх, хто працює з колами й кутами. Саме в його трактаті «Про сходження» вперше в грецькій науці зустрічається поділ кола на 360 частин – традиція, імовірно запозичена з вавилонської астрономії, де рік поділявся на 360 днів.

Гіпсикл застосовує цей поділ для розрахунку часток часу, протягом яких той чи інший знак зодіаку сходить над горизонтом. Такий підхід став основою не лише для астрологічних таблиць, а й для формування звичної нам системи кутових вимірювань.

Хоч деякі вчені вважають, що Гіпсикл лише відредагував давній вавилонський текст, зберігши тільки вступні зауваги, його внесок полягав у передачі й адаптації цих ідей у межах грецької науки. Його праця стала своєрідним мостом між вавилонською традицією спостережень та грецькою традицією теоретичного аналізу.

Праці Гіпсикла були перекладені арабською мовою у IX ст., а в XII ст. – латинською Герардом Кремонським. Так вони потрапили до середньовічної Європи.

Менелай Александрійський

Праці Гіппарха про устрій небес стали відправною точкою для Менелая Александрійського (близько I – II століть н. е.) – ученого, який стояв на межі двох епох: елліністичної традиції та римського світу. Його ім'я пов'язують насамперед із заснуванням сферичної тригонометрії як самостійної дисципліни та з видатним твором «Сферика» у трьох книгах. Менелай першим в історії усвідомив, що геодезичні лінії на кривій поверхні відіграють ту ж роль, що й прямі на площині, поклавши початок новій – неевклідовій – геометрії.

Вважається, що Менелай народився в Александрії. Проте більшу частину свого життя він провів у Римі, куди, ймовірно, перебрався вже у зрілому віці. Про його перебування в Римі свідчать згадки в «Альмагесті» Клавдія Птолемея, який посилається на два астрономічні спостереження Менелая, здійснені в січні 98 року н. е. – у перший рік правління імператора Траяна. Йдеться про окультації зір Спіка і Бета Скорпіона Місяцем, проведені з такою точністю, що Птолемей використав їх для підтвердження явища прецесії рівнодень, відкритого Гіппархом. Також Плутарх повідомляє про бесіду Менелая з певним Луцієм, яка відбулася в Римі. Папп Александрійський і Прокл згадують його під ім'ям «Менелай Александрійський», що підтверджує його походження.

Головним твором Менелая вважається «Сферика» – трактат у трьох книгах, присвячений геометрії сфери та її астрономічним застосуванням. Грецький оригінал не зберігся; зміст відомий із арабського перекладу, виконаного Хунайном аль-Ібаді у X столітті, та подальших латинських перекладів, зокрема Герарда Кремонського (XII ст.), а також коментарів Франческо Мавроліко (XVI ст.) і Едмунда Галлея (XVII ст.).

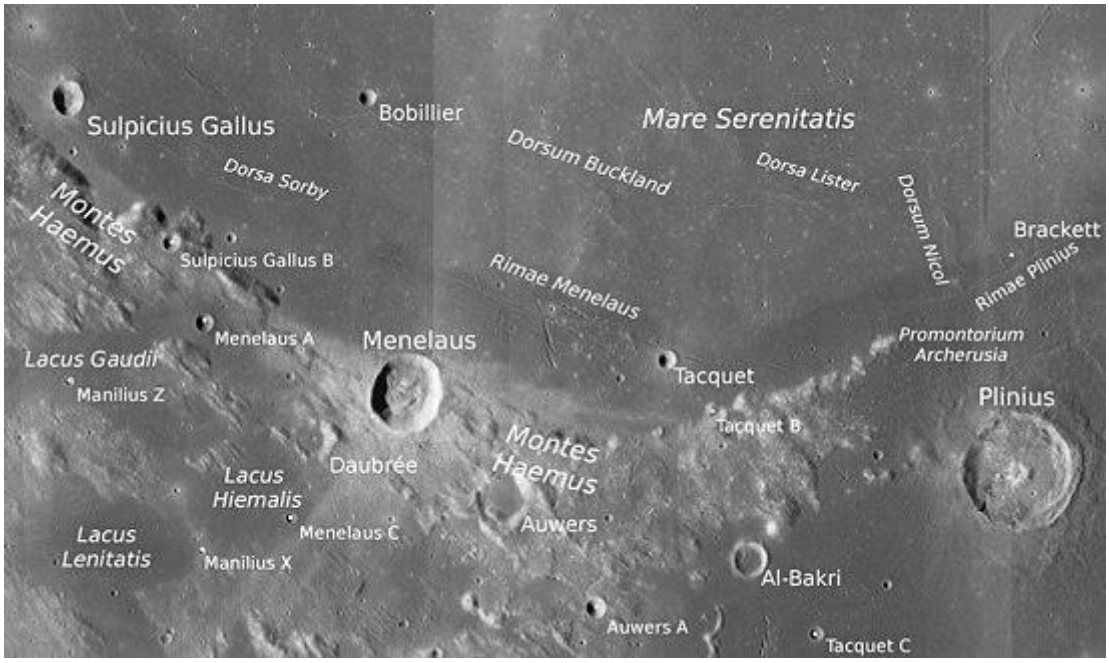
Перша книга містить 39 положень, у яких вводиться поняття сферичного трикутника (т. зв. «трилатерал») і формулюються базові властивості таких фігур. Ця книга вважається підґрунтям сферичної геометрії як окремої галузі математики.

Друга книга (21 положення) присвячена властивостям систем паралельних кіл на сфері, що перетинаються різними великими колами. В основі цієї частини лежить праця більш раннього автора – Феодосія.

Третя книга починається з лем про складні відношення і містить узагальнення знаменитої теореми Менелая (у площинному та сферичному варіантах). Ця теорема, що

описує колінеарність точок, згодом набула ключового значення в розвитку сферичної тригонометрії.

Цікаво, що на відміну від більш пізніх арабських авторів, Менелай формулює сферичну теорему не у термінах синусів, а у термінах відношень хорд – давнішого підходу, що походить із еллініcтичної астрономії.



Околиці кратера Менелай на Місяці, знімок апарата Lunar Reconnaissance

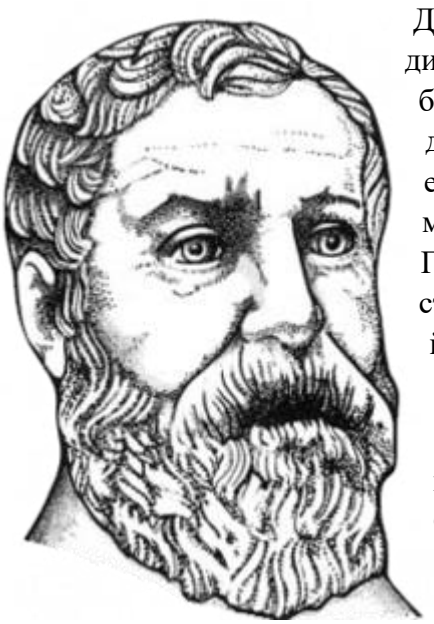
Папп Александрійський та інші джерела згадують і низку інших творів Менелая, що не дійшли до нас: «Про обчислення хорд у колі» – у 6 книгах, ймовірно, містила таблиці хорд, подібні до тих, якими згодом користувався Птолемей; «Начала геометрії» – у 3 книгах, можливо, своєрідний альтернативний виклад евклідової геометрії; «Книга про трикутник» – можливо, стосувалася як площинної, так і сферичної геометрії; «Про заходи знаків зодіаку» – твір, імовірно, астрономічного характеру; «Про поділ складених тіл» – працю з механіки та гідростатики, у якій розглядалися питання питомих ваг тіл. Її цитує ал-Хазіні у трактаті «Книга ваг мудрості».

Особливий інтерес викликає згадка у творах Паппа про те, що Менелай займався «незвичайною лінією», точне геометричне визначення якої невідоме. Дослідник Поль Таннері припустив, що йшлося про криву, яка виникає при перетині сфери й циліндра, твірна якого проходить через центр сфери, а радіус удвічі менший. Таку криву використовував Архіт Тарентський для розв’язання задачі про подвоєння куба, і через працю братів Бану Муса відомо, що Менелай займався цією проблемою.

Герон Александрійський

Герон Александрійський, який, імовірно, жив у I столітті н. е., був одним із найвидатніших інженерів і вчених античності. Місце його народження і смерті – Александрія, найбільший науковий центр еллініcтичного світу. Попри відсутність

достовірних біографічних відомостей, із збережених трактатів зрозуміло: перед нами винахідник, що значно випередив свій час.



Датування життя Герона залишається предметом дискусій. Відомо, що він згадує місячне затемнення 13 березня 62 року н. е., що дозволяє віднести його діяльність до другої половини I століття. Проте в різні епохи вчені висували гіпотези, які поміщали його життя між III ст. до н. е. і III ст. н. е. Деякі джерела називають Герона учнем великого інженера Ктесибія, який жив у III ст. до н. е., і це, у разі підтвердження, суттєво змінило б його біографічні межі.

Герон викладав у Мусейоні Александрії – давньому прообразі сучасних університетів, де очолював технічну школу. Він спирався на досягнення Архімеда, Евкліда, Стратона з Лампсака, Філона Візантійського та, ймовірно, Ктесибія, розвиваючи їхні ідеї й доповнюючи їх власними оригінальними розробками.

Герон – автор численних трактатів, що охоплюють механіку, геометрію, гідравліку, оптику, балістику та прикладну математику. Його твори, такі як «Пневматика», «Механіка», «Метрика», «Про діоптру», «Катоптрика», «Автоматопоетика», стали класикою античної науки. Багато з них збереглися лише в латинських або арабських перекладах. Деякі, на жаль, були втрачені разом з Александрійською бібліотекою.



Найбільшої слави Герон здобув завдяки своїм автоматичним пристроям. У трактаті «Пневматика» він описує десятки механізмів, що діють за допомогою пари, води й повітря. Серед них – еоліпіл (перша парова турбіна в історії людства), автоматичні двері храмів, торговий автомат для видачі «святої води», самоочисний фонтан, водяний орган, пожежний насос, театральні машини з програмованими рухами, звуковими та світловими ефектами.

Його театральні автомати були не просто забавками – вони демонстрували розуміння принципів зворотного зв’язку, програмування та механічної пам’яті.

У трактаті «Механіка» Герон формулює золоте правило механіки: виграш у силі завжди супроводжується втратою у відстані. Він систематизує знання про п’ять найпростіших механізмів – важіль, блок, гвинт, клин і колесо – та описує пристрої, що передають і перетворюють рух.

Трактат «Про діоптру» присвячений одному з перших геодезичних інструментів – діоптру, попереднику теодоліта. Герон описує методи знімання місцевості, а також дивовижне завдання прокладання тунелю крізь гору, розпочате з двох протилежних боків – прообраз сучасної гірничої інженерії. Тут же він згадує одометр – прилад, що відстежує пройдену відстань за допомогою системи зубчастих коліс.

У «Метриці» Герон систематизує прикладну геометрію. Він наводить формули для обчислення площ і об’ємів, зокрема знамениту формулу Герона – спосіб визначення площі трикутника за його сторонами. У книзі також описані методи числового розв’язання рівнянь та ітераційний алгоритм добування коренів – попередник методів Ньютона.



Парова турбіна Герона (фото з сайту Вікіпедія)

У «Катоптриці» Герон описує прямолінійність поширення світла та закон відбиття, використовуючи принцип найкоротшого шляху (передбачення принципу Ферма). Він детально аналізує властивості плоских, сферичних і циліндричних дзеркал, демонструючи глибоке розуміння геометричної оптики.

Клавдій Птолемей

Якщо Герон Александрійський був справжнім інженерним генієм свого часу – майстром механічних пристроїв, геометром та експериментатором, то Клавдій Птолемей (бл. 100 – бл. 170 н. е.) уособлює зовсім інший тип ученого. Це не винахідник машин, а систематизатор, творець всеосяжних теорій і строгих математичних моделей. Їх розділяє близько століття: після хитромудрих автоматів Герона приходить епоха Птолемея з його геоцентричною картиною Всесвіту, зоряними каталогами, таблицями хорд і книгою, що стала символом античної астрономії на багато століть – «Альмагестом». Але й у математиці його внесок був надзвичайний. Зокрема, в роботі «Планісферій» він заклав математичний фундамент для астрономії, імовірно ще до того, як створив Альмагест.

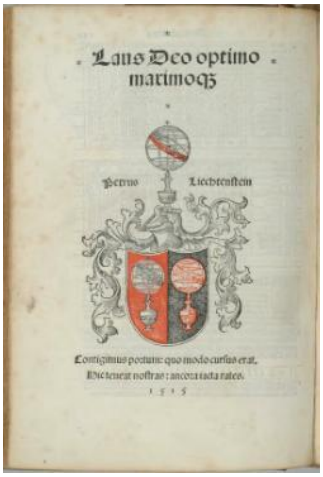
Одне з найцікавіших досягнень Птолемея – використання тригонометрії для астрономії. Щоправда, вона ще не була такою, як зараз. Замість синусів і косинусів він оперував

хордами – відрізками, що сполучають дві точки на колі. Птолемей склав детальні таблиці хорд, які можна вважати прабатьками сучасних тригонометричних таблиць.



Зображення Клавдія Птолемея з твору Андре Теве «Справжні портрети і життя видатних людей...», 1584 р.

У «Альмагесті» він побудував таблицю хорд із кроком у пів градуса. Для обчислень Птолемей користувався вавилонською шістдесятковою системою числення й брав коло з радіусом 60 одиниць. Таким чином, він зміг подати синус 1° як довжину хорди, приблизно рівну 1,05 (у сучасних термінах – $\sin(1°) \approx 0.017452$).



Видання «Альмагеста» латинською, 1515 рік

Для побудови таблиць і розв'язання трикутників Птолемей використовував власну теорему – теорему Птолемея про вписаний чотирикутник. Відповідно до неї, сума добутків протилежних сторін чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює добутку його

діагоналей. Це дозволило йому знаходити значення хорд, будувати таблиці та виконувати астрономічні обчислення з високою для того часу точністю.



Цікаво, що в межах «Планісферія» Птолемей вводить математичні інструменти, необхідні для подальшого розвитку сферичної астрономії – вчення про небесну сферу, систему координат і положення зір на небесній сфері. Хоча тригонометрія ще не існувала як окрема дисципліна, підхід Птолемея можна розглядати як крок у напрямку її становлення.

Його праці справили колосальний вплив на розвиток математичної астрономії. Вони були перекладені арабською мовою, активно використовувалися вченими ісламського Золотого віку, а згодом стали основою для європейської середньовічної науки.



Варто зазначити, що приблизно в ту ж епоху, а можливо й трохи раніше, в Індії почала формуватися альтернативна математична традиція, у якій замість хорд активно застосовувалися синуси, ближчі до сучасних тригонометричних функцій. Індійські математики, зокрема Арьябхата (V–VI ст.), запровадили поняття «ardha-jya» – «половина хорди», що, по суті, й є сучасним синусом. На відміну від Птолемея, який вимірював довжину хорди в колі, індійські астрономи віддавали перевагу роботі зі співвідношеннями сторін у прямокутних трикутниках. Ця відмінність у підходах стала визначальною: індійська традиція заклала основу сучасної тригонометрії, тоді як птолемеївська система хорд із часом була витіснена. Проте обидві традиції розвивалися паралельно – іноді незалежно, а іноді перегукуючись у працях ісламських учених, які синтезували здобутки як грецької, так і індійської науки.



Йос ван Гент, Педро Берругете, Птолемей з арміллярною сферою, бл. 1476 р.

Діофант Александрійський

Діофант Александрійський – одна з найзагадковіших, але водночас ключових постатей



в історії античної математики. Точні дати його життя невідомі: за одними припущеннями він жив у III столітті н. е., за іншими – у IV. Лише окремі свідчення дозволяють приблизно визначити його місце в історії. Так, його «Арифметика» присвячена «найповажнішому Діонісію». Вважають, що цей Діонісій – єпископ Діонісій Александрійський, який жив у середині III ст. н. е[36]. Наприклад, у одному зі своїх коментарів візантійський учений Теон Александрійський (IV століття) згадує Діофанта як уже померлого автора, що дозволяє дійти висновку, що Діофант творив не пізніше початку IV століття.

Попри бідність біографічних даних, до нас дійшов анекдот, приписуваний пізній античності, у якому вік Діофанта зашифровано у вигляді математичної задачі. Його можна знайти в грецькій епітафії, приписуваній невідомому авторові[37]:

«Се справді гробниця Діофанта.

Дивне диво: сам камінь звістує

хитромудрим числом міру життя його.

Шосту частину віку дитям він прожив;

коли ж додалося ще дванадцята частка,

щоки його вкрилися юним пушком.

Після сьомої частки життя

засвітив він весільний світильник.

І п’ять літ потому від шлюбу

народився йому син. О, нещасний!

Любий дитя, ти згас,

ледь половину батьківського віку проживши.

Утіху в скорботі своїй ще на чотири літа

знайшов Діофант у студіюванні чисел.».

[36] Саме на цій посяті ґрунтується припущення деяких істориків про те, що Діофант був християнином.

[37] Цей вірш є частиною 14-ї книги «Грецької антології» (Ἀνθολογία Ἑλληνική), яка була складена в V–VI столітті н.е. граматиком Метродором.

Вона еквівалентна розв’язанню рівняння , коренем якого є число 84, тобто вік Діофанта виявляється рівним 84 рокам.

Хоча, звісно, це не більше ніж літературна гра, сам по собі цей анекдот демонструє, наскільки образ Діофанта був пов’язаний із математикою навіть у культурній пам’яті.

Головний твір Діофанта – «Арифметика» – дійшов до нас у частково збереженому вигляді. В оригіналі він, імовірно, складався з тринадцяти книг, із яких грецькою збереглося шість (можливо, сім), а ще чотири відомі в арабському перекладі. Решта, ймовірно, були втрачені.

Зміст «Арифметики» – це не систематичний виклад алгебри в сучасному розумінні, а зібрання задач і розв’язків. Ці задачі стосуються знаходження раціональних чисел, що задовольняють тим чи іншим алгебраїчним умовам, і нерідко подаються у практичній або навіть розважальній формі. У сучасній термінології йдеться про діофантові рівняння – рівняння, розв’язки яких шукаються в цілих чи раціональних числах.

Попри відсутність загальної теорії, кожна задача супроводжується методом її розв’язання, часто унікальним і винахідливим. У цьому проявляється характерна риса праці Діофанта: він не пропонує єдиний алгоритм, а підходить до кожної задачі творчо, використовуючи прийоми, що нагадують аналітичну алгебру.

Одним із визначних внесків Діофанта вважається запровадження власної символіки. Він позначає невідоме особливим знаком і використовує символи для квадратів, кубів та інших степенів. Хоча його нотація не була системою в сучасному сенсі, вона відкрила шлях до символічної алгебри й справила значний вплив на арабських, а згодом і на європейських математиків. Так, алгебра у працях аль-Хорезмі та аль-Караджі, а пізніше – й у математиків доби Відродження значною мірою розвивалася під впливом спадщини Діофанта.

Особливого значення «Арифметика» набула у XVII столітті, коли П’єр Ферма, читаючи латинський переклад книги, залишив на полях свій знаменитий коментар до однієї з задач: «Я знайшов воістину дивовижне доведення, але поля цієї книги надто малі, щоб його вмістити».

Це стало народженням великої теореми Ферма, яка залишалася нерозв’язаною майже 350 років. Так «Арифметика» надихнула не лише розвиток математики, а й цілу епоху математичних пошуків.

Окрім «Арифметики», Діофанту приписують ще два твори:

«Про многокутні числа» – твір, відомий лише за короткими згадками в інших джерелах. Імовірно, воно стосувалося теорії фігурних чисел: трикутних, квадратних, п’ятикутних тощо. «Породження» також відоме лише за назвою. Можливо, цей твір містив трактування розв’язків або обмежень у контексті діофантових рівнянь. Проте точний характер цього твору залишається предметом реконструкцій і припущень. На жаль, жоден із цих трактатів не зберігся до наших днів в оригіналі.

Папп Александрійський

Папп Александрійський (близько 290 – близько 350 рр. н. е.) вважається одним із останніх видатних математиків великої Александрійської школи. Небагато з того, що відомо про його біографію, почерпнуто головно з його власного твору – багатотомника «Математичні збори», а також із коментарів пізніших авторів.

Папп жив і працював в Александрії, яка в його час уже переживала поступовий занепад. Судячи з його звернень у власних творах, Папп викладав математику й мав учнів. Про його сім'ю, учителів чи особисте життя достовірної інформації немає.

Ймовірно, Папп був інтелектуальним спадкоємцем більш раннього Діофанта Александрійського. Однак доба Паппа була іншою: у часи пізньої античності в Середземномор'ї панували релігійні настрої та метафізичні пошуки, тоді як інтерес до строгих наукових досліджень слабшав.

У своїх працях він майже не залишає часових орієнтирів: не подає дат ані для авторів, чиї роботи коментував, ані для власного життя. Відомо лише, що він жив пізніше Клавдія Птолемея (помер близько 168 р. н. е.), якого Папп цитує, і раніше Прокла (народився близько 411 р.), який посилався на Паппа. Існує кілька розрізнених вказівок на час його діяльності. Так, візантійська енциклопедія Суда (X ст.) повідомляє, що Папп був сучасником Теона Александрійського, який працював при імператорі Феодосії I (372–395 рр.). В іншому джерелі – у маргінальній нотатці до хронік Теона – зазначено, що Папп творив за часів імператора Діоклетіана (284–305 рр.). Однак ці дані не зовсім узгоджуються між собою.


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum Conuerſæ, & Commentarijs
Illuſtratæ.
VENETIIS,
Apud Franciſcum de Franciſcis Senenſem.
M. D. LXXXIX.

Титульна сторінка Mathematicae Collectiones Паппа в перекладі Федеріко Коммандіно, 1589 р.

Більш точну дату можна встановити завдяки самому Паппу. У своєму коментарі до «Альмагесту» Птолемея він описує спостережене ним сонячне затемнення, датуючи його 1068 роком ери Набонассара. Це відповідає 18 жовтня 320 року н. е. Таким чином,

можна з великою впевненістю вважати, що Папп був науково активним близько 320 року.

Цікаво, що сам Папп зазначає, що писав у важкі часи, що, можливо, пов'язано з лихами – голодом та соціальними потрясіннями в Єгипті на початку IV століття.

Головним твором Паппа є монументальна праця, яку в українському перекладі традиційно називають «Математичні збори». Це свого роду енциклопедія грецької математики, написана в восьми книгах. На жаль, до наших днів дійшли лише книги III–VIII, і то з прогалинами; перші дві книги загублені.

«Математичні збори» задумувалися як систематизація та пояснення досягнень ранньої грецької математики, доповнена власними розробками Паппа. Він не лише викладав ідеї своїх попередників, а й розширював їх, надавав нові доведення та формулював власні теореми.

Окрім «Математичних зборів», Паппу приписують і інші роботи, про існування яких відомо або з його власних згадок, або з пізніших джерел. Так, Папп написав обширний коментар до фундаментального астрономічного трактату «Альмагест» Птолемея. До сьогодні він майже не дійшов, збереглися лише фрагменти через цитати пізніших авторів.

Коментар до творів Аполлонія Пергського про конічні перетини частково зберігся в арабських перекладах і був важливим джерелом для розвитку теорії конік у середньовіччі. Також відомий коментар Паппа до «Аналеми» Гіппарха – трактату зі сферичної астрономії – та його трактати з механіки і фізики, у яких Папп цікавився застосуванням математики до реального світу, зокрема принципами рівноваги та важелів. У своїх астрономічних працях він займався питаннями визначення часу, спостереженнями руху Сонця і Місяця, аналізом сонячних затемнень.

«Математичні збори» містили вісім книг, проте до нас дійшли лише книги з третьої по восьму, причому й вони мають прогалини.

Про перші дві книги відомо надзвичайно мало. Деякі відомості про них черпаються з передмов до збережених частин і з коротких згадок у творах пізніших авторів.

Перша книга, ймовірно, містила введення в елементарну арифметику та геометрію. Можливо, вона слугувала своєрідним оглядом базових понять і методів, підготовкою до більш складних тем.

Друга книга, за припущеннями, була присвячена більш складним питанням геометрії та числовим співвідношенням, можливо – подільності чисел і властивостям величин. Деякі дослідники вважають, що в ній Папп обговорював теми, близькі до вчення про пропорції, яке розвивав Евдокс.

Точно реконструювати їхній зміст неможливо, проте можна припустити, що ці книги виконували роль фундаменту, на якому будувався весь подальший виклад – від основ математики до її більш складних застосувань.

Третя книга присвячена питанням арифметики та геометрії, причому особлива увага приділяється різним видам пропорцій та побудов. Однією з ключових тем тут є задача про побудову двох середніх пропорційних між двома заданими відрізками. Папп також

докладно розглядає різні види середніх величин між двома відрізками: середнє арифметичне, середнє геометричне, середнє гармонійне та інші види середніх, які цікавили античних учених у зв'язку з їхніми дослідженнями властивостей чисел і величин.

Окреме місце в книзі займає геометрична задача про вписування правильних многогранників у сферу. Папп описує способи побудови таких вписаних тіл, спираючись на результати, що походять від Платона та Теєтета, і, ймовірно, користуючись працями Евкліда та Аполлонія.

Крім того, третя книга містить обговорення властивостей подільності чисел, правил знаходження найбільших спільних дільників і найменших спільних кратних, а також пропорцій між числами та величинами. У ряді випадків Папп наводить оригінальні доведення та побудови, спрощуючи або доповнюючи матеріали своїх попередників.

Важливо зазначити, що в третій книзі, як і в інших частинах «Математичних зборів», текст дійшов до нас із деякими прогалинами та лакунами, що іноді ускладнює його точну інтерпретацію.

У четвертій книзі Папп переходить до розгляду більш складних об'єктів – кривих і поверхонь, що виникають у результаті різних геометричних побудов. Книга починається з кількох теорем з планіметрії, що стосуються властивостей фігур на площині. Особливе місце займають описи та аналіз спіралі Архімеда, конхоїди Нікодема та квадратриси Діностратa. Папп наводить не лише визначення цих кривих, а й власну класифікацію кривих, що є однією з важливих особливостей четвертої книги. Остання частина книги присвячена подальшому аналізу властивостей цих кривих і їхньому застосуванню до розв'язання класичних задач античної геометрії, таких як трисекція кута, квадратура кола та подвоєння куба.

У передмові до п'ятої книги Папп наводить відомий приклад природної мудрості – бджолині соти. Він зазначає, що площину можна замостити лише трьома видами однакових правильних многокутників: рівносторонніми трикутниками, квадратами та правильними шестикутниками. Бджоли, за його словами, мудро обрали шестикутник, оскільки серед усіх трьох фігур саме він має найбільшу кількість сторін і дозволяє створити комірки, що вміщують більше меду при тому ж використанні воску на стінки.

Після цього вступу Папп переходить до викладу ізоперіметричних задач, у яких досліджується, які фігури мають найбільшу площу або об'єм при заданому периметрі чи поверхні. Перша частина книги є переказом і розвитком ідей Зенодора. Зокрема, Папп наводить найважливішу ізоперіметричну теорему: серед усіх фігур із заданим периметром найбільшу площу має круг. До вже відомих теорем Зенодора Папп додає власне твердження: серед усіх сегментів кола з фіксованим периметром найбільшу площу має півколо. Далі Папп обговорює аналогічні задачі для просторових тіл. Хоча він не зміг довести, що куля має найбільший об'єм серед усіх тіл із заданою площею поверхні (результат, який буде строго доведений лише в новий час методами аналізу), він показав, що об'єм кулі більший за об'єм будь-якого правильного многогранника з такою ж площею поверхні.

Друга половина п'ятої книги присвячена вченню про правильні тіла. Папп викладає властивості п'яти класичних правильних многогранників (платонових тіл) та обговорює

також тринадцять напівправильних многогранників, відомих під назвою архімедових тіл. Він описує їхні побудови та властивості, зберігаючи таким чином цінні відомості про праці Архімеда, які в античності користувалися великою славою, але пізніше були втрачені.

Шоста книга «Математичного зібрання» Паппа присвячена астрономії та містить огляд різних астрономічних трактатів, відомих в античності та активно використовуваних ученими того часу. Ця книга є свого роду коментарем до вже існуючих праць. У першій половині книги Папп розглядає основні проблеми, пов'язані з вивченням «Альмагеста» Птолемея. Він намагається розв'язати труднощі і проблеми, з якими стикалися ті, хто прагнув зрозуміти методи й ідеї Птолемея. Також Папп пояснює, як учені того часу намагалися застосовувати геометричні методи для опису й аналізу астрономічних явищ, таких як рух небесних тіл. Особлива увага приділяється трактатам, що входили до збірника «Малий астроном», призначеного для навчання роботі з «Альмагестом» та іншими астрономічними творами. Зокрема, Папп докладно коментує «Сферіку» Феодосія, «Про обертову сферу» Автоліка з Пітани, «Про величини й відстані» Арістарха Самоського, «Оптику» Евкліда та «Феномени» Евкліда. Папп розв'язує різні теоретичні та практичні питання, що виникають у зв'язку з цими трактатами, пояснюючи й доповнюючи їх, щоб спростити розуміння складних астрономічних концепцій і методів.

Сьому книгу Папп починає з пояснення різниці між аналізом і синтезом – двома основними методами доведення в геометрії. Аналіз передбачає тимчасове допущення істинності шуканого твердження та рух назад, досліджуючи, з яких припущень воно могло б випливати. Синтез – це зворотний процес: побудова доведення, починаючи з уже відомих положень і аксіом.

Ці методи Папп застосовує до геометричних побудов і міркувань, особливо спираючись на праці Евкліда, Аполлонія та Арістея. Його виклад робить класичну геометрію більш гнучкою та орієнтованою на процес міркування, а не лише на результат.

Одним із центральних результатів книги стала формулювання геометричної теореми, пізніше відкритої П. Гульдіном у XVII столітті. Сьогодні вона відома як теорема Паппа-Гульдіна: об'єм тіла обертання дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, описуваного її центром тяжіння при обертанні.

У тій же книзі Папп коментує роботи Аполлонія про трансверсалі та ангармонічне відношення (сучасною мовою – подвійне відношення чотирьох точок на прямій). Він формально вводить поняття подвійного відношення і доводить його інваріантність при проекціях – фундаментальний факт, що лежить в основі проективної геометрії. Більш того, Папп уперше вводить поняття полюса і поляри відносно кола.

Особливо цінною частиною книги є леми та коментарі до загублених творів. Серед них – відомості про структуру та зміст загубленої книги Евкліда «Поризми», у якій, за словами Паппа, твердження займали проміжне положення між теоремою і побудовою.

Хоча ім'я Паппа рідко згадується в історії проективної геометрії, саме в його сьомій книзі вперше з'являються майже всі її фундаментальні елементи: інваріантність подвійного відношення, ідея проекції, полюс і поляра. Він також фактично формулює

теорему, аналогічну пізнішій теоремі Дезарга. Однак ця теорема здобула відомість лише під ім'ям Дезарга, а не Паппа.

Восьма книга «Математичних зборів» є компіляцією різнорідних відомостей і оригінальних досліджень Паппа, пов'язаних із механічними явищами та практичним застосуванням математики. До складу книги входять описи пристроїв вантажопідіймальних машин і трактування ряду питань з геометричної статики, головним чином щодо визначення центрів тяжіння різних фігур і умов рівноваги вантажу, розташованого на похилій площині. Особлива увага в книзі приділена кінематичним теоремам. Один із яскравих прикладів – теорема, що стверджує: при одночасному русі трьох матеріальних точок, розташованих спочатку у вершинах трикутника, якщо кожна точка рухається по стороні, швидкість руху якої пропорційна довжині цієї сторони, положення центра тяжіння залишається незмінним.

Крім того, в восьмій книзі детально розглядається пристрій передавального механізму, винайденого Архімедом і описаного Героном Александійським. Цей механізм, заснований на використанні зубчастих коліс, демонструє, як за допомогою правильного розрахунку та конструкції можна ефективно перетворювати й передавати механічну силу, що дозволяло приводити в рух різні вантажі із заданою силою.

Захід грецької математики

Розквіт грецької математики, що охоплював період від Фалеса до Діофанта, був по-справжньому винятковим. Проте, як і будь-яка історична епоха, він мав і свою кульмінацію, і свій захід. Визначити точний момент початку занепаду непросто. Одні дослідники вважають його початком епоху після Аполлонія Пергського (II ст. до н. е.), інші – час після Діофанта (III ст. н. е.), останнього великого математика елліністичного світу. Насправді ж математика в Римській імперії не зникла одразу – дослідження продовжувалися, але в умовах, що ставали все менш сприятливими.



Вигаданий портрет Гіпатії Жуля Моріса Гаспара, 1908 р.

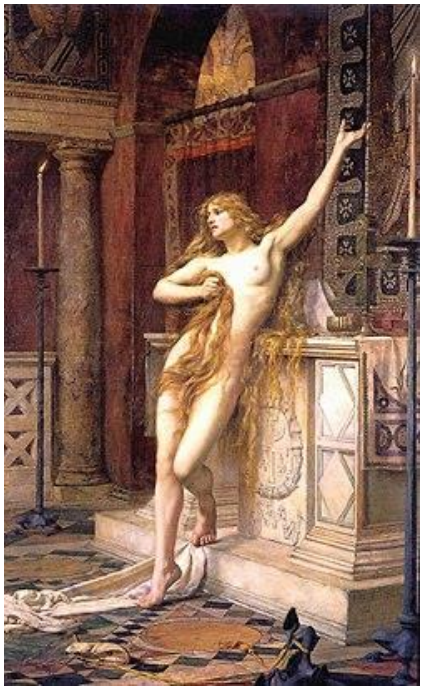
Однією з головних причин занепаду наукової активності стало зміщення культурного й інтелектуального клімату в пізній Античності. Християнство, яке зміцнювалося в перші століття н. е., ставилося до язичницької культури з явною недовірою, а часом і з відкритою ворожістю. Учених переслідували, рукописи знищувалися. Саме прагнення до раціонального аналізу й критичного мислення, яке лежить в основі наукового підходу, суперечило принципам віри, заснованої на одкровенні та авторитеті. Характерна фраза одного з перших християнських апологетів, Тертулліана: «Після Христа нам не потрібна жодна допитливість».

Водночас римська державна влада, зосереджена на адміністративному та військовому управлінні імперією, не заохочувала заняття абстрактними науками. Високо цінувалися лише практичні знання – інженерія, архітектура, військові технології.

Проте александрійська школа, заснована в елліністичну епоху, продовжувала існувати до IV століття.

З кінця IV століття починається систематичне переслідування науки. У 391 році за наказом християнської влади була спалена Александійська бібліотека. Знищення грецької книжкової спадщини тривало ще кілька століть. Коли в VIII столітті арабські вчені почали шукати та перекладати грецькі тексти, дійшло лише небагато. Але й ці фрагменти стали фундаментом арабської, а згодом і європейської науки.

У V столітті в Александрії працювала Гіпатія – остання видатна представниця античної школи. Її трагічна смерть від рук фанатиків у 418 році стала символом кінця класичної античної науки. Гіпатія коментувала праці Аполлонія і Діофанта, викладала філософію та математику і, за свідченнями сучасників, відзначалася не лише ерудицією, а й рідкісним даром красномовства.



Чарльз Вільям Мітчелл, Смерть Гіпатії, 1885 р.

Серед неоплатоніків, які продовжували наукову традицію в Афінах, важливою фігурою був Прокл (бл. 410–485), автор цінних коментарів до «Елементів» Евкліда. Його

короткий огляд історії геометрії від Фалеса до Евкліда став одним із джерел наших знань про ранню грецьку математику. Коментаторська діяльність тривала й у VI столітті: Евтокій складав обширні примітки до праць Архімеда і Аполлонія, Симплікій – до філософії Аристотеля, додаючи математичні вставки.

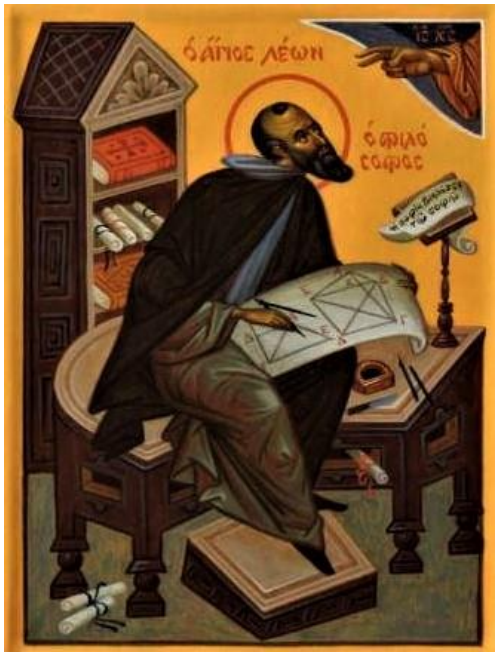
У VI столітті н. е. антична математична традиція переживала останні миті свого розквіту в умовах глибоких політичних і культурних змін. Імперія вже не була тим простором вільного наукового пошуку, яким була в еллініcтичну епоху. Символом цього перелому став Кодекс Юстиніана (529–534 рр.), збірка римського права, де серед інших розпоряджень міститься важливе положення щодо наук: «Вивчення та викладання мистецтва геометрії веде до загального блага. Мистецтво математики ж суворо забороняється». Це протиставлення геометрії й математики може здатися дивним сучасному читачеві, але у візантійській правовій та богословській традиції під «математикою» часто розуміли заняття, пов'язані з астрологією та «забороненими» числовими мистецтвами, які підозрювали в магії та язичницьких віруваннях. Навпаки, геометрія, як основа архітектури та інженерії, зберігала утилітарну цінність і була допустимою в рамках християнської імперії.

На цьому фоні особливе значення набувають імена Ісидора Мілетського та Анфімія з Тралл – двох учених-архітекторів, які відіграли ключову роль у зведенні Собору Святої Софії в Константинополі (532–537). Обидва були не лише видатними інженерами, а й мали ґрунтовну математичну підготовку. Особливо Анфімій відомий своїми інтересами в галузі геометрії: йому приписують трактат про конічні перетини, де він експериментував із фокусами еліпсів і гіпербол, що, ймовірно, мало й практичне застосування в акустиці. Їхній внесок у архітектуру Софійського собору – гігантський купол на «парусах», складна система склепінь і освітлення – свідчить про глибоке розуміння просторових форм і навантажень, а отже, і про живу математичну культуру, хоч і спрямовану тепер на прикладні завдання.

Іншим значним представником пізньої античної математики був Евтокій з Аскалона (бл. 480 – після 540), один з останніх великих коментаторів класичних грецьких математиків. Його праці з тлумачення Архімеда та Аполлонія зберегли для наступних поколінь важливі фрагменти та інтерпретації античної науки. Евтокій не лише передавав зміст творів, а й прагнув пояснити складні доведення, відновити логічну структуру, додати власні зауваження та приклади. Завдяки його зусиллям багато текстів Архімеда дійшли до нас у вигляді, близькому до оригіналу. Він уособлює тип ученого, який уже не створює нових теорій, а ретельно зберігає й систематизує спадщину минулого – фігуру характерну для перехідної епохи, коли антична наука поступалася місцем візантійській традиції.

Закриття Афінської академії у 529 році імператором Юстиніаном стало символічним завершенням античної наукової епохи. Проте пам'ять про неї зберігалася й розвивалася у Візантії – східній частині Римської імперії, яка, незважаючи на релігійні й політичні потрясіння, залишалася хранителькою античної спадщини.

Особливе місце серед пізньовізантійських учених займає Леон Філософ (Леон Математик), який жив у IX столітті. Його діяльність є яскравим свідченням того, що математична традиція у Візантії, хоч і в іншій формі, продовжувала існувати.



Леон був не лише вченим, а й педагогом, організатором, винахідником. Він викладав математику та астрономію в Константинопольському університеті, став автором коментарів до творів Евкліда, Архімеда та Птолемея, створював оригінальні астрономічні таблиці, а також займався інженерією: від автоматичних пристроїв до оптичної телеграфної системи, що дозволяла передавати повідомлення на сотні кілометрів.

Зауважимо, що він одним із перших почав використовувати літери для позначення невідомих в алгебрі, випередивши в цьому арабських математиків. Хоча майже всі його праці були знищені після перемоги іконопочитання (Леон був іконоборцем)[38], його вплив відчувався ще в XI столітті – у працях учнів і послідовників, таких як Фотій, Кирило і Мефодій.

Таким чином, незважаючи на занепад і руйнування, антична математична думка не зникла безслідно. Вона зберіглася – у працях пізніх коментаторів, у візантійських монастирях і університетах, а згодом – у арабському світі, де отримала друге дихання. Саме завдяки цим посередникам європейське Відродження знову відкрила античну науку, побачивши в ній джерело власного розвитку.

Значення грецької математики

Антична грецька математика – це не просто один із етапів розвитку науки, а фундамент, на якому будувалося подальше зведення європейської та близькосхідної наукової думки. На відміну від своїх попередників у Вавилоні чи Єгипті, греки розглядали математику не лише як практичний інструмент, а насамперед як спосіб пізнання світу через розум і доведення.

Головне нововведення грецької математики – ідея дедуктивного методу. У працях Евкліда, Архімеда та Аполлонія сформувався тип наукового міркування, де кожна теорема виводиться з чітко сформульованих визначень, аксіом і раніше доведених тверджень. Цей підхід став зразком строгого мислення і вплинув не лише на математику, а й на логіку, філософію та навіть богослов’я.

Крім того, греки заклали основи геометричної алгебри, сформулювали теорію пропорцій, вивчали ірраціональні числа та почали систематично досліджувати криві другого порядку – еліпси, параболи та гіперболи. В Греції було поставлено проблему

[38] Іконоборство – рух у Візантії VIII–IX ст., спрямований на заборону шанування ікон, мотивований ідеєю боротьби з ідолопоклонством. Іконопочитання підтримувало шанування святих зображень як засобу духовного виховання та молитви. Конфлікт між цими течіями призвів до політичних і релігійних переслідувань, руйнування храмів і знищення творів мистецтва і науки.

побудови чисел і фігур за обмеженим набором операцій – циркуль і лінійка – що пізніше стало основою цілого розділу математики.

Значення грецької математики проявляється й у її культурній ролі. Для греків числа і фігури були не просто абстракціями, а виявом космічного порядку. У цьому сенсі Піфагор і Платон розглядали математику як шлях до істини, пропорційної й гармонійної. Тому античні праці зберігалися, переписувалися, коментувалися – спершу в Александрийській школі, потім у Візантії та ісламському світі.

Грецькі математики вперше ставили питання, що виходили за межі прямої користі: чи можна довести, що паралельні прямі не перетинаються? Чи можна з заданих аксіом побудувати всі інші геометричні істини? Ці питання звучать сучасно і стали рушійною силою розвитку математики протягом тисячоліть. Без них була б неможлива наукова революція XVII століття, коли Декарт, Кеплер і Паскаль критично переосмислили і розвинули ідеї античності. Навіть у XIX–XX ст., створюючи нові розділи – від топології до функціонального аналізу, – математики часто виявляли, що втілюють те, що було задумано в Давній Греції.

Так, спадщина грецької математики виявилася не лише довговічною, а й дивовижно живучою. Навіть у періоди культурного занепаду її ідеї передавалися – іноді спотворені, іноді застиглі – але ніколи не зникали повністю. І щоразу, коли людство було готове до нового витка наукового пізнання, воно невідмінно зверталося до античних джерел.

У цьому місці логічно було б продовжити розповідь про вплив грецької математики на розвиток європейської наукової думки, але зробимо невеликий відступ і почнемо другий том цієї збірки кількома словами про два інші великі центри математичної думки Стародавнього і Середньовічного Світу – Китай і Індію.

Математика корінних народів Америки.



Історію математики традиційно розглядають через призму європейської культури, починаючи з античних цивілізацій Греції та Риму, далі через розвиток арабської математики та її вплив на середньовічну Європу, і аж до Нового часу та сучасних математичних теорій. Однак такий погляд, нехай і логічний, обмежує наше розуміння математики як феномену, що розвивався в багатьох культурних контекстах. Включення в курс історії математики розділу про математичні досягнення корінних народів Америки дозволяє подивитися на науку ширше й усвідомити її універсальність.

По-перше, це дає змогу розглянути альтернативні шляхи розвитку математики. Довгий час математика корінних народів Америки залишалася в тіні європейської традиції, проте їх числові системи, методи обчислень і геометричні принципи демонструють, що математика розвивалася незалежно в різних куточках світу. Зокрема, двадцяткова позиційна система майя з використанням нуля є унікальним явищем, що показує інший підхід до чисел, ніж той, який сформувався в Європі.

По-друге, вивчення американської математики допомагає зрозуміти, які знання передавалися в процесі культурних контактів. Колонізація Америки не лише призвела до руйнування місцевих цивілізацій, але й сприяла взаємодії різних математичних традицій. Європейські дослідники стикалися з кипу – вузловою системою інків для збереження числових даних, а також із точними астрономічними розрахунками, які лежали в основі календарів майя та ацтеків. Хоча ці знання не були безпосередньо інтегровані в європейську науку, їхнє вивчення розширює уявлення про різні форми математичного мислення.

По-третє, математика корінних народів Америки доповнює загальну картину історії науки. Архітектурні споруди інків, такі як Мачу-Пікчу та Саксайуаман, демонструють застосування складних інженерних розрахунків на основі геометрії. Астрономічні

комплекси майя та інших народів свідчать про високу точність прогнозів руху небесних тіл. Такі приклади доводять, що математика розвивалася не лише як теоретична наука, але й як практичне мистецтво, що обслуговувало потреби суспільства.

Нарешті, розгляд американських математичних традицій цінний і з методологічного погляду. В європейській традиції наука розвивалася переважно через письмові тексти, тоді як у народів Америки математичні знання передавалися усно або через символічні системи, як-от кипу. Це нагадує нам, що математичне мислення не обмежується алгебраїчними формулами й теоремами, а може проявлятися в зовсім інших формах.

Таким чином, хоча математика корінних народів Америки історично стояла осторонь європейської традиції, її вивчення необхідне для повного розуміння історії науки. Розповідь про розвиток математики у світі була б неповною без огляду на математичні уявлення та практики корінних народів Америки – від арктичних просторів Півночі до джунглів Центральної Америки та високогір'їв Анд. Хоча ці культури рідко входять до канонічних курсів історії науки, їхній внесок заслуговує уваги не лише через культурне різноманіття, але й через оригінальні підходи до числа, форми, вимірювання та порядку.

Для багатьох народів Америки, як і для більшості традиційних суспільств, математика не була абстрактною дисципліною, що розвивалася заради інтелектуального задоволення. Вона була невід'ємною частиною повсякденного життя: застосовувалася у землеробстві, будівництві, торгівлі, астрономії, хронології, релігійних ритуалах та, особливо, в мистецтві. У цих культурах число та форма нерозривно пов'язані з практикою й символікою – вони слугували не лише для обліку та вимірювання, а й як спосіб опису світу, знаходження в ньому сенсу та встановлення порядку.

Джерел, що дозволяють реконструювати математичні знання цих народів, надзвичайно мало. У багатьох суспільствах інформація передавалася усно, а письмові системи (як-от у майя) частково були втрачені після європейського завоювання. Колонізація, епідемії та насильницька асиміляція призвели до загибелі носіїв знань, руйнування бібліотек[39] і заборони традиційних практик. Тому сучасні уявлення про математику корінних народів Америки базуються на фрагментах: небагатьох збережених кодексах і хроніках, археологічних знахідках, усній традиції, а також аналізі архітектурних, інженерних і мистецьких об'єктів.

Важливо підкреслити, що «індіанська математика» – це не єдине явище. Термін може вводити в оману, адже за ним стоїть безліч унікальних культур: понад чотириста різних племен і народів, кожен із яких мав власну мову, систему числення, способи вимірювання та геометричні уявлення. І все ж, незважаючи на це різноманіття, дослідники відзначають спільні риси: наявність систем обліку, використання чисел для ведення господарських записів, розуміння пропорцій і симетрії в архітектурі та декоративному мистецтві.

[39] Хоча у традиційному європейському розумінні бібліотек у корінних народів Америки не було, вони мали власні системи збереження знань. Майя створювали кодекси – сувої з ієрогліфами, що містили астрономічні, ритуальні та історичні дані. Інки користувалися кипу – вузловими шнурами для обліку населення, зерна та податків. Інші народи зберігали знання через малюнки, символи або усну традицію. Усі ці системи виконували функцію накопичення та передачі інформації поколінням, хоч і відрізнялися від письмових бібліотек Європи.

Нумерація і лічба

У корінних народів Америки існувало вражаюче різноманіття числових систем, що відображало багатство культур, мов і способів мислення. Ці системи були не просто практичними інструментами – вони тісно вплітalися в повсякденне життя, тілесність, мову та міфологію.

Однією з центральних особливостей числових систем корінних американців була їхній зв'язок із тілом. Багато культур будували рахунок на пальцях рук і ніг. Наприклад, у індіанців Сан-Габріель (Каліфорнія) число 10 позначалася як «вся моя рука завершена», а 20 – як «інша моя нога завершена збоку». Таким чином, двадцять символізувало все тіло, а система ставала двадцятковою – тобто з основою 20.

Деякі народи використовували не самі пальці, а проміжки між ними. Так, народ юкі з Північної Каліфорнії рахував не по пальцях, а по чотирьох проміжках між ними на кожній руці, що давало основу 4, а потім і 8.

Сучасні десяткова та двійкова системи здаються нам звичними, але у корінних народів Америки існувало щонайменше шість різних основ числення. Дослідники зафіксували 307 різних систем, серед яких близько 33% – десяткові, 33% – п'ятіркові, 23% – двійкові, 10% – двадцяткові, менше 1% – трійкові, а деякі – з основою 4 або навіть безосновні.

Особливо цікаві безосновні системи, в яких числа позначалися окремими словами, не пов'язаними між собою. У народів Сирьона та Янамамо (Болівія і Бразилія) були слова лише для «один», «два» та «три», а всі інші значення передавалися як «багато». Але це не означало неспроможності рахувати. Наприклад, у народу Шуар (родинного живаро) підрахунок здійснювався за допомогою жестів, пов'язаних з пальцями рук і ніг, хоча слів для чисел понад п'ять не існувало.

Отже, відсутність абстрактних числівників не означала відсутності кількісного мислення – лічба могла існувати на основі тілесних або візуальних асоціацій.

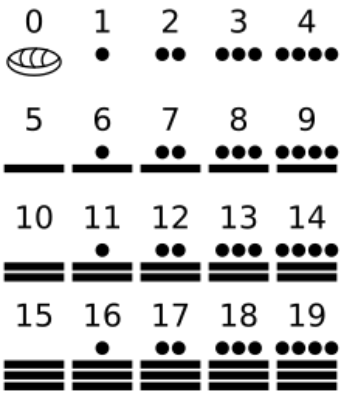
У багатьох мовах Америки числівники формувалися не як набір унікальних слів, а шляхом арифметичних операцій – додавання, множення, рідше віднімання чи ділення. За спостереженням Вільяма Ілза, у 40% вивчених мов числа утворювалися через комбінації, як у німецькій або іспанській: наприклад, «двадцять і п'ять» для 25, «двічі десять» для 20 тощо.

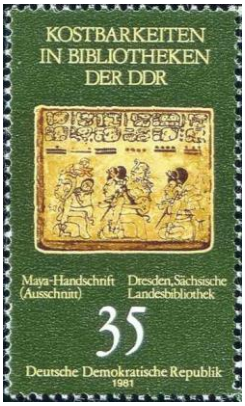
Цікаво, що іноді використовувалося ділення. У пауні та в одному з діалектів інуїтів слово «п'ять» означало «десять, поділене навпіл».

Таке мовне конструювання демонструє, що арифметичне мислення цих народів було цілком зрілим, хоч і не завжди вираженим у звичній нам системі письмової нотації.

Серед народів Північної Америки, що використовували десяткову систему, особливо виділяються мовні групи салішів, ірокезів, алгонкінів та сіу. У народів Центральної та Південної Америки – кечуа (включно з інками), майя та ацтеків – також існували добре розроблені системи.

Майя, наприклад, застосовували повну двадцяткову систему та мали чіткі символи для чисел. Їхні числа записували вертикально, використовуючи точки (одиниці), риски (п’ятірки) та символи для більших порядків.





Цифри майя

Одним із найвражаючих досягнень цивілізації майя стало незалежне відкриття та активне використання поняття нуля. Задовго до появи цього символу в Індії та його проникнення в Європу через арабську науку, майя вже користувалися нулем у своїй позиційній системі числення. Цей символ застосовувався всередині числового запису, що робило систему справді позиційною: значення кожного знаку залежало від його місця в записі. Так, число 401, наприклад, могло бути записане як «1 – мушля – 1», тобто 1×400 + 0×20 + 1.

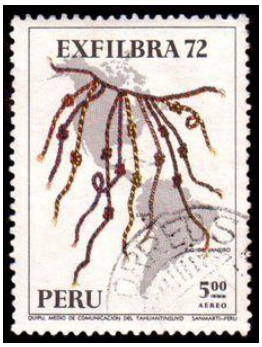


Пам'ятник нулю, м. Канкун, Мексика

Нуль відігравав не лише технічну, а й концептуальну роль: він дозволяв майя виконувати складні обчислення, вимірювати час у їхній знаменитій календарній системі «довгого рахунку» та точно відзначати дати, віддалені на тисячі років від поточного моменту. Саме завдяки нулю майя могли записувати такі дати, як 13.0.0.0.0 (еквівалент 21 грудня 2012 року), із абсолютною ясністю та точністю.

Унікальність нуля у майя полягає в тому, що він виник у контексті астрономічних та ритуальних розрахунків, а не з торгової чи бухгалтерської практики, був повноцінним математичним символом, який використовувався всередині системи, а не допоміжним знаком, і виник незалежно від інших культур. Це підтверджує універсальність математичного мислення як прояву людського розуму.

Ацтеки також користувалися основою 20, надаючи особливе значення числам 400 (20×20) та 8000 (20×400), що відображалося й у їхній календарній системі.





Інки, навпаки, використовували модифіковану десяткову систему, поєднану з системою вузлових мотузок кіпу, яка дозволяла передавати числову інформацію – аж до мільйонів.

Деякі народи Північної Америки, як-от апачі, чокто, мікмаки та лакота, могли рахувати в межах сотень тисяч і мільйонів, використовуючи власні слова або словосполучення. Таким чином, потенційна верхня межа лічби могла бути дуже високою, навіть якщо в побуті такі числа зустрічалися рідко.

Історії та легенди багатьох народів свідчать про культурну оцінку лічби. Так, в одному переказі народу інуїтів двоє чоловіків починають суперечку і вирішують з’ясувати правду, рахуючи волосся на вовку та карибу. Вони так і не закінчують – помирають від голоду. Історія завершується мораллю: «Ось що трапляється, коли займаєшся марними й пустими справами, які ні до чого не ведуть». Це демонструє, що лічба сприймався не як універсальна цінність, а як навичка, що вимагала здорового глузду та поміркованості.

Арифметика

Коли ми говоримо про арифметику корінних народів Америки, важливо пам’ятати, що в більшості культур до приходу європейців вона була глибоко вплетена у практичні потреби життя — землеробство, обмін, календар, облік землі та людей, а також у релігійні й ритуальні практики. Однак уявлення про числа й операції з ними могло суттєво відрізнятися від європейської традиції. Це була не стільки формальна наука, скільки узагальнена система розуміння кількісних відносин, тісно пов’язана з мовою, космологією та способом життя.

Існує обмежена кількість прямих свідчень про те, як корінні американці виконували арифметичні обчислення. Але лінгвістичний аналіз числівників у низці мов — зокрема, в науатлі (мові ацтеків), мовах народів Аляски та північного заходу, а також спостереження за практиками інків — дає підстави стверджувати, що додавання, віднімання, множення й ділення були їм відомі та активно застосовувались, хоча часто й не оформлювались у вигляді абстрактних правил, як у грецькій чи індійській математиці.

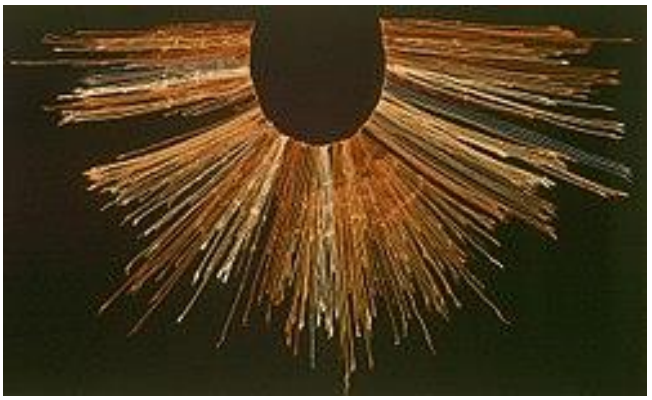
Саме побудова чисел у мові часто передбачала використання операцій: наприклад, вислів «п’ять один» для позначення числа 6 чи «п’ять чотири» для 9 у деяких народів Аляски відображає ідею додавання. У народу мілук-куус з території сучасного Орегону використовувалась ідея віднімання: «чотири до десяти» означало 6, «один до десяти» — 9. Таким чином, арифметика була присутня в самій структурі мови.

Особливо винахідливими виглядали випадки множення. Наприклад, у пауні фраза «50 людей» означала число 1000, бо саме слово «людина» асоціювалось із числом 20 (10 пальців на руках і 10 на ногах), а $50 \times 20 = 1000$.

Найяскравіший приклад складної числової системи знаходимо у народів, що розмовляли науатлем — мовою ацтеків, тольтеків та інших центральномексиканських культур. Вони користувалися двадцятковою системою числення (основа 20), а самі числівники у мові будувалися на принципах розкладу на множники й підсумовування. Наприклад, число 113 197 у науатлі розбивається як $14 \times 8000 + 2 \times 400 + 19 \times 20 + 17$. Кожен компонент — це ступінь двадцяти: $20^1 = 20$ (поаллі), $20^2 = 400$ (цонтлі), $20^3 = 8000$ (шихіпіллі).

Самі назви чисел уже включають у себе операції: «чотирнадцять восьмитисяч» плюс «дві чотирьохсотки» плюс «дев’ятнадцять двадцяток» плюс «сімнадцять одиниць». Таким чином, мова не просто називала число, а й аналізувала його структуру, а дії додавання й множення були вбудовані у саму логіку найменування чисел.

Приклад застосування арифметичних операцій у культурі ацтеків — їхній календар, що складався з двох перехресних циклів: 260-денного ритуального й 365-денного сонячного. Поєднання цих циклів утворювало 52-річне «Коло років», що вимагає розуміння найменшого спільного кратного та операцій додавання/множення. Складні числові відповідності були основою для пророцтв і ритуалів, таких як Церемонія нового вогню, що відбувалася наприкінці кожного 52-річного циклу.

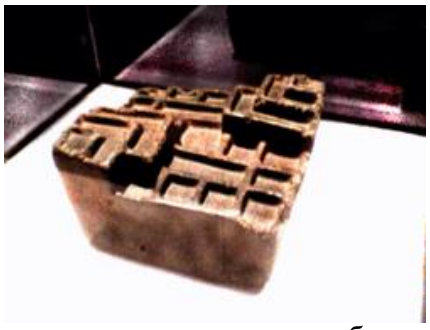


Кіпу інків. Музей Ларко

Після іспанського завоювання в документах народів Тескоко (частина ацтекської конфедерації) фіксувалася податкова інформація з використанням візуальної нотації. Вона також будувалась на двадцятковій системі й включала позиційне подання чисел у прямокутних символах земельних ділянок. Візуальні елементи (лінії, пучки ліній, крапки) вказували на кількість одиниць у різних ступенях двадцяти (1, 20, 400). Це наочна система рахунку, в якій обліковувались не лише цілі, а й дробові частини (позначалися, наприклад, гліфом руки).

На півдні континенту, у державі інків, арифметика була частиною адміністративної системи. Тут також простежується поділ між системами збереження інформації та інструментами обчислень.

Кіпу — знаменита система вузликових шнурів — служила радше для збереження даних, ніж для проведення обчислень. Різні типи вузлів, кольори, розташування шнурів дозволяли створювати складні числові таблиці — своєрідний аналог сучасних електронних таблиць.



Для самих обчислень інки використовували юпани (рахункові дошки) — аналоги абака. Вони будувалися на десятковій системі (на відміну від ацтеків) і мали рядки та стовпці, де розміщувалися камінці або зерна кукурудзи. Рядки представляли ступені десяти: одиниці, десятки, сотні тощо. Стовпці ж позначали різні кратності кожного ступеня: ×1, ×5, ×15, ×30. Останні два значення були пов’язані з інкським календарем, і їх використання надавало обчисленням культурно-ритуального контексту.

Процес перенесення значень між розрядами (аналог «переносу» в нашій арифметиці) був описаний іспанськими хроністами: наприклад, один елемент у «30»-стовпці можна було замінити на три елементи в «1»-стовпці наступного рядка.

Нарешті, важливо зазначити, що рахункові дошки використовувалися не лише інками. Письмові джерела фіксують їх у алгонкінів на північному сході США та в багатьох інших народів на всій території континенту. Їхня структура могла адаптуватися до місцевої системи числення (двадцяткової, десяткової тощо), але сам принцип — лічба за допомогою візуальних маркерів і позиційної структури — був універсальним.

Система мір

Як і у випадку з арифметикою, відомості про системи мір та ваг у доколумбових народів Америки дійшли до нас лише частково. Жодне з цих суспільств не залишило по собі абстрактної метрологічної теорії на зразок грецьких трактатів чи римських таблиць, проте археологічні дані, етнографічні описи та свідчення європейських хроністів дозволяють відновити загальне уявлення про те, як вимірювали довжину, площу та об’єм у цих культурах.

Системи мір у більшості випадків були контекстно залежними й емпіричними. Вони будувалися на тілесних орієнтирах (наприклад, довжина ліктя чи крок) і відображали не стільки абстрактні одиниці, скільки практичні потреби конкретної ситуації — чи то

землеробство, будівництво чи торгівля. Такі виміри були не універсальними, а радше локальними й ситуативними. Це характерно як для великих імперій, на зразок інків і ацтеків, так і для племен Північної Америки, де, наприклад, в оджибве короткі відстані вимірювались пальцями, долонями, ліктями й розмахами рук, а тривалі — кількістю «снів» (тобто ночівель), потрібних для проходження маршруту, або зміною положення сонця на небі. Подібні «одиниці» були особистими, гнучкими, залежними від контексту й зазвичай не стандартизувалися навіть у межах одного племені.

У Мезоамериці та Андах існували більш формалізовані, але все ж прикладні міри довжини. В ацтеків важливою одиницею був tlalquahuitl («земляний шест») — приблизно 2,5 метра, імовірно, походивший від реального будівельного шеста. Інші одиниці включали matl — довжину від ліктя до кінця пальців (близько 50 см), xopantli — відстань між розведеними руками.

У інків одиницею відстані служила tupu, що первісно означала «ділянку землі», але також позначала відстань, пройдену за певний час. Крім того, використовувались rikra («ширина плечей») і coto (лікоть). Ці одиниці могли змінюватися залежно від завдань — землемірних, будівельних чи військових.

Попри видиму варіативність, у таких централізованих державах, як Тауантінсуйу (імперія інків), міри довжини застосовувалися системно — наприклад, при плануванні доріг, терас чи складів. Археологічні дослідження показують, що будівлі й інфраструктура в Куско та інших центрах підпорядковувалися повторюваним модулям, а отже, існували неформальні чи державою закріплені стандарти.

Міри площі в сільському господарстві були тісно пов’язані з оподаткуванням і обліком земель. В ацтеків земельні ділянки зображалися у вигляді прямокутників у піктографічних реєстрах, де кожна частина відповідала певній кількості кроків чи модулів. Об’єми часто позначалися символічно — за допомогою знаків, що вказували на тип культури (кукурудза, агава тощо) й приналежність землі.

У інків термін tupu вживався не лише як довжина, а й як площа — це була стандартна земельна ділянка, яку надавали родині. Однак точні розміри могли змінюватися залежно від регіону й родючості ґрунту: важливим було не геометричне вимірювання, а здатність ділянки прогодувати певну кількість людей.

Міри об’єму в ацтеків і майя ґрунтувалися на стандартних посудинах, кошиках і мішках, особливо у торгівлі. Наприклад, міра cacaxtli використовувалась для зберігання та транспортування какао, яке слугувало не лише товаром, а й своєрідною валютою. Це свідчить про зародження товарно-грошових еквівалентів.

У інків склади qullqa, розкидані по всій території імперії, наповнювалися зерном, сіллю, тканинами та іншими ресурсами у строго визначених об’ємах. Археологи знаходять повторювані форми керамічних посудин, що вказує на певний рівень стандартизації. Проте вага як абстрактна категорія, відокремлена від об’єму, ймовірно, була відсутня або відігравала другорядну роль: в аграрних суспільствах продукцію вимірювали радше «за місткістю», ніж за масою.

У централізованих суспільствах — таких як у інків і в Ацтекській імперії — міри та об’єми контролювалися адміністративною системою. Державні службовці стежили за

правильністю наділів, об’ємів сховищ, праці та податків. У менш централізованих культурах, як-от у народів північноамериканських лісів, точна стандартизація траплялася рідше, а виміри залишалися гнучкими й умовними.

Таким чином, метрологічна практика доколумбових народів варіювалася від майже індивідуальних і ситуативних оцінок до квазідержавних систем обліку. Ця різноманітна картина відображає не «відсутність науки», а інший спосіб організації знань — не через абстракції, а через практику, засновану на спостереженні, досвіді та вбудованості у соціальне й природне середовище.

Геометрія

Наші знання про геометричні концепції та техніки, розроблені корінними народами Америки до контакту з європейцями, залишаються обмеженими. Проте аналіз архітектури, планування міст, предметів мистецтва та усної традиції дозволяє припустити існування розвинених і різноманітних геометричних уявлень.

Дослідження показують, що в таких народів, як оджибве, геометричне мислення проявлялося в особливій категоризації форм. Наприклад, префікс noonim- позначає категорію «витягнуте й округле», що свідчить про здатність до абстрактного мислення й тонкого аналізу форм. Оджибве також створювали терміни з розмитими межами, що відображає їхнє сприйняття природного світу як мінливого й складного. Це перегукується із сучасними уявленнями про фрактальні форми, які складно виразити в класичній евклідовій геометрії.

В інших народів геометрія проявлялася в архітектурі та прикладному мистецтві. Наприклад, ацтеки й майя використовували різноманітні інструменти — високі, рівні, будівельні косинці, циркулі й клини — для точної розмітки та зведення споруд. У Тікалі майя будували храми по осях так, щоб вони утворювали майже ідеальні прямокутні трикутники. А в місті Ушмаль головні елементи архітектури були зорієнтовані відповідно до руху Венери, що свідчить про зв’язок геометрії з астрономією та релігією.



Храм у Тікалі (фото Dennis G. Jarvis)

Особливо яскраво геометричне мислення проявляється в декоративно-прикладному мистецтві. Прикраси піхов, мокасинів, кошиків, ковдр, кераміки та торбинок демонструють складні орнаменти, які часто будуються на основі чітких геометричних принципів. Різні племена застосовували різні підходи: одні віддавали перевагу криволінійним рослинним візерункам, інші — виключно прямолінійним формам. Поширеними були трикутники (рівносторонні, рівнобедрені, прямокутні), хрестоподібні та дзеркально-симетричні фігури, а також кола й спіралі.



Візерунок племені навахо

Особливу увагу дослідники приділяють симетріям, що зустрічаються у бісерних візерунках. Найпоширеніший тип — із потрійною симетрією (горизонтальною, вертикальною та обертальною). У процесі створення цих узорів майстри могли використовувати рахунок, прийоми вимірювання (периметр, площу), елементи теорії чисел (дільники, кратні), а також дроби й пропорції.



Труба з мушлі Strombus із насічками, 400–200 рр. до н. е., культура Чавін, Перу, © Бруклінський музей

Геометрія простежується й у текстильних виробах, таких як ковдри та навахські пледи, де застосовуються мозаїчні та плиткові візерунки. Подібні геометричні мотиви іноді зустрічаються й у петрогліфах, вирізьблених на скелях і каменях.



Петрогліфи Крау-Каньйона (фото з сайту Вікіпедія)

Традиційні будівельні методи також свідчать про розуміння базових геометричних принципів. Наприклад, плем’я омаха розмічало круглі житла за допомогою мотузки, прив’язаної до центрального кілка — по суті, використовуючи примітивний циркуль. Квакиутль з острова Ванкувер будували квадратні будинки, застосовуючи метод, що дозволяв точно знаходити перпендикуляри та ділити відрізки навпіл за допомогою мотузки й кілків — наочне застосування базової евклідової геометрії.



Руїни палацу в Ушмалі (фото з сайту Вікімедія)

Деякі культури, такі як чавінці в Перу, володіли прийомами точного вирівнювання каменів і створення прямих кутів, хоча ми не знаємо точно, як вони здійснювали такі розрахунки. У спорудах із можливими функціями обсерваторій (наприклад, палац правителя в Ушмалі чи храм у П'єдрас-Неграс) застосовувалися складні геометричні побудови, що включали трикутники, орієнтацію за сторонами світу й симетричні осі.

Нарешті, у деяких народів існувало уявлення про розмірність: палиця символізувала перший вимір (довжину), шкура тварини — другий (площу), а горіх — третій (об'єм). Водночас перспектива в малюнках традиційно не використовувалася — об'єкти зображалися площинно, без глибини.

Елементи теорії ймовірностей

Хоча у корінних народів Америки не існувало формалізованої теорії ймовірностей у європейському сенсі, багато їхніх традиційних ігор демонструють інтуїтивне й культурно осмислене розуміння випадковості, ймовірнісних подій і навіть неявного розподілу результатів.

Яскравим прикладом є гра «кидок паличок» у апачів. В одній із версій цієї гри використовують три палички, оздоблені з одного боку. Гравець кидає їх на землю, і залежно від того, скільки оздоблених сторін випало догори, нараховуються очки: 10 очок за три «лиця», 5 — за два, 2 — за одне, і 1 — за відсутність «обличь». Очки відстежуються за допомогою маленьких паличок («конячок»), які рухаються по колу з 30 каменів. Ця проста гра не лише моделює ймовірнісні події (наприклад, яка ймовірність випадіння двох «обличь»?), а й потребує елементарних обчислень, як-от підрахунку очок і планування ходу.

Подібні ігри були поширені серед різних племен. Зокрема, у кайюґа (одного з ірокезьких народів) існувала гра з шістьма персиковими кісточками, пофарбованими з одного боку. Ці «кістки» кидали у дерев'яну чашу, і очки нараховувалися залежно від кількості пофарбованих сторін, що випали догори. Дослідниця Марсія Ашер у своїй книзі Ethnomathematics показала, що система підрахунку очок у цій грі практично точно відповідала теоретичним ймовірностям відповідних комбінацій. Наприклад, рідкісні поєднання пофарбованих сторін приносили більше очок — очевидна ознака інтуїтивного розуміння того, що менш імовірний результат має винагороджуватися вище. Ашер пише: «Тісна відповідність між очками, які нараховували кайюґа, і тими, що ми б обчислили, виходячи з імовірнісних міркувань, свідчить про те, що основа вибору цих значень справді ймовірнісна».

Цікаво, що самі гральні «кістки» та матеріали для них відрізнялися від племені до племені. Використовували персикові кісточки, роги оленів, зуби бобрів, фруктові кісточки, мушлі й навіть дерев'яні або кістяні палички. Майже завжди сторони відрізнялися кольором чи текстурою, і найчастіше «кістки» були двосторонніми. Однак через грубе виконання симетрія була недосконалою, і ймовірність випадіння кожної сторони могла відрізнятися. Це, схоже, усвідомлювали гравці, адже рідкісні комбінації оцінювалися вище — що можна розглядати як культурне наближення до ідеї нерівномірного розподілу ймовірностей.

Великий внесок у документування цих ігор зробив Стюарт Кулін — етнолог, який опублікував фундаментальну працю «Games of the North American Indian». У ній він описав понад 130 ігор із кістками, збираючи дані в музеях, серед племен і в архівах. Його записи часто містять точні відомості про матеріал, форму, розмальовку та правила, а також — що особливо цінно — про систему підрахунку очок. Так, у грі народу керес (Акома, Нью-Мексико) використовували три палички, пофарбовані з одного боку. Очки нараховувалися так: 10 за три чорні сторони догори, 5 — за три білі, 3 — за одну білу і 2 — за дві білі. Рух гравців відбувався по колу з 30 каменів, схожому на ігрове поле в апачів. Така механіка поєднує випадковість, підрахунок і ймовірнісні міркування — по суті, усе те, що становить основу елементарної теорії ймовірностей.

Отже, хоча поняття на кшталт «апріорної ймовірності» чи «розподілу» не формулювалися ні в усній, ні в письмовій формі, культурна практика корінних народів Америки демонструє глибоке й практичне розуміння природи випадковості. Ігри з кидками, з їхньою варіативністю, урахуванням рідкісності та справедливою винагородою за рідкісний результат — це інтуїтивна, але чітко виражена форма ймовірнісного мислення.

Підсумкові коментарі

Математичні уявлення корінних народів Америки — це яскраве нагадування про те, що математика розвивається не лише в межах «великих» цивілізацій, які залишили по собі писані трактати, а й у культурах, де знання передається усно — через ритуали, ігри, орнаменти, архітектуру та щоденні практики. Їхні системи числення, геометричні конструкції в тканинах і прикрасах, елементи ймовірнісного мислення в іграх — усе це свідчить про глибоке інтуїтивне розуміння чисел, форм, симетрії, випадковості та міри.

Особливо важливо, що народи Америки незалежно прийшли до концепції нуля, яка в інших частинах світу стала основою для революції в математиці. Це відкриття ще раз підкреслює універсальність людського прагнення до абстракції й раціоналізації світу.

Вивчення математики корінних культур Америки допомагає нам переосмислити звичні уявлення про «центри» й «периферію» математичного розвитку. В історії науки немає єдиного шляху: існує безліч стежок, і кожна культура залишила на них свої сліди. Ці альтернативні математичні традиції не лише збагачують історичну картину, а й нагадують, що математика — це справді людське знання: багатоголосе, різноманітне й укорінене в культурі.

Перелік проектів

Деякі теми, важливі для розуміння історичного розвитку математики, з цілком зрозумілих причин не були детально розкриті в рамках цього курсу. Обмеженість формату, орієнтованого не лише на спеціалістів, а також прагнення зберегти зв'язне оповідання змусили нас залишити поза увагою цілі напрями та постаті, які заслуговують окремого вивчення. Проте що саме ці «незакриті гештальти» можуть стати чудовою відправною точкою для самостійної проектної чи дослідницької роботи.

Тому наприкінці курсу бажаючим поглибити матеріал пропонується обрати одну з додаткових тем — за власним інтересом, схильностями або просто з цікавості. Ці теми можуть стати основою есе, презентації, міні-дослідження чи творчого проекту, у якому математика розглядається як культурне явище — у зв'язку з філософією, мистецтвом, технікою, релігією чи соціальним життям.

Такі проекти можуть виконуватися як індивідуально, так і в групах і, за розсудом викладача, можуть зараховуватися як частина підсумкової оцінки за курс. Список тем див. нижче.

1. Розвиток лічби в первісних суспільствах.
2. Геометричні мотиви в культурі первісних суспільств.
3. Математика давньогрецьких пірамід.
4. Ідея необхідності доведення: виникнення, розвиток, вплив на історію людства.
5. Давньогрецькі жінки-математики.
6. Історія розвитку поняття інтелектуальної власності: від Фалеса до сучасних скандалів із плагіатом.
7. Лунки Гіппократа: ідея, постановка задачі, розв'язок, значення.
8. Феодор і його побудова сторін квадратів об'ємів 3, 5, 7, …, 17. Чому Феодор зупинився на 17?
9. Задача подвоєння куба в давньогрецькій математиці: міфи, реальність, реконструкції відомих розв'язків.
10. Елліністичний період у розвитку античної культури. Заснування Олександрійської бібліотеки та Мусейону.
11. Математика в Палатинській антології (список задач, розв'язок без застосування рівнянь, переклад на сучасну мову, логіка міркувань, які задачі допускають більш загальний розв'язок або раціональне узагальнення формулювання).
12. Теон і Гіпатія. Смерть Гіпатії як символ кінця античної науки.
13. Проблема розмежування реальності та культурних міфів при вивченні історії математики віддалених епох.

14. Парадокси теорії множин: формулювання, розв’язок і вплив на історію науки.
15. Нерозв’язані математичні задачі: постановка, спроби розв’язку та вплив на розвиток математики.
16. Математичні терміни та символи. Історія виникнення та розвитку. Вплив термінології та символів на розвиток конкретних галузей математики.
17. Роль жінок у математиці Європи.
18. Роль античної спадщини у розвитку європейської математики, як праці Евкліда, Архімеда та Аполлонія Пергського вплинули на Відродження.
19. Історія створення календаря в Китаї.
20. Розвиток тригонометрії в Індії.
21. Усвідомлення поняття нескінченного ряду в індійській математиці.
22. Перекладацький рух у Багдаді та його вплив на розвиток науки в ісламському світі.
23. Жінки в математиці ісламського світу.
24. Геометричні орнаменти в мистецтві ісламу, зв’язок із теорією груп.
25. Геометрія в архітектурі корінних народів Нового Світу.
26. Число як шлях до Бога: середньовічне виправдання математики.
27. Від Евкліда до кафедри богослов’я: історія одного наукового авторитету.
28. Язичницька спадщина в християнському обрамленні: математика як культурний компроміс.
29. Геометрія готичних соборів.
30. Математика та мистецтво епохи Відродження: зв’язок математичних ідей із живописом та архітектурою.
31. Як в Європі виникла ідея нуля та від’ємних чисел.
32. Розвиток поняття ірраціонального числа.
33. Розвиток поняття дробового показника.
34. Еволюція математичної логіки: від Буля до Фреге.
35. Математика в музиці: темперація та гармонія.
36. Криптографія від Цезаря до Тьюринга: математичні методи шифрування та їхня роль в європейській історії.
37. Математичні ігри у країнах Сходу: азартні ігри, «змії та сходи», шахи тощо.
38. Як математика увійшла до європейської системи освіти: від середньовічних університетів до сучасної шкільної програми.
39. Еволюція підручників з математики. Огляд найзначущіших книг (від «Начал» Евкліда до підручників XIX століття).

40. Розвиток математичної освіти в Україні: виникнення, основні етапи, особливості у порівнянні з іншими країнами.
41. Інша ВАЖЛИВА та ЦІКАВА тема, не висвітлена в цьому збірнику (за погодженням із викладачем).

Використані джерела

Alberti M., *Planet Mathematics: A Numerical Journey Around the World*, R BA Coleccionables, 2017.

Archimedes, https://math.nyu.edu/Archimedes/ .

Ascher M., *Ethnomathematics*, Pacific Grove: Brooks/Cole, 1991.

Banu Musa brothers at McTutor, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banu_Musa/

Bardi J.S., *The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time*, Thunder's Mouth Press, 2006.

Berggren, J.L., *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986.

Bertoloni Meli D., *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz: Including Leibniz's Unpublished Manuscript on the Principia*, Oxford University Press, 1993.

Boyer C.B., *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover Publications, 1959.

Bressoud D., Was Calculus Invented in India?, *The College Mathematics Journal*, 2002б **33** (1), 2–13.

Brockliss L., *A History of the University in Europe. Vol. 2, Universities in early modern Europe (1500-1800),* Cambridge, 1996.

Brukner Havelková P., Dulíková V., Bejdová Š, Vacková J., Velemínský P., Bárta M., Ancient Egyptian scribes and specific skeletal occupational risk markers (Abusir, Old Kingdom), *Scientific Reports,* 2024, **14**, Article number: 13317.

Cai T., *A Brief History of Mathematics. A Promenade through the Civilizations of Our World*, Birkhäuser, 2023.

Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Cosimo, Inc., 2007.

Capra F., *The Science of Leonardo,* US: Doubleday, 2007.

Child J.M. (ed.), *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Dover Publications, 2005 (reprint of original 1920 edition).

Closs M, *A Survey of Mathematics Development in the New World*, Ottawa, Canada: University of Ottawa, 1977.

Colish M.L., *Medieval Foundations of the Western Intellectual Tradition (400–1400)*, Yale University Press, 1999

Conant L.L., *The Number Concept*, New York: Macmillan & Co, 1896.

Culin S., *Games of the North American Indians*, Volume 1, *Games of Chance*, Lincoln: University of Nebraska Press, 1992.

Dahan-Dalmedico A., Peiffer J., *Une Histoire des Mathématiques: Routes et Dédales*, POINTS, 1986.

Dauben, J.W., *Chinese Mathematics*, in Katz V.J. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*, Princeton University Press, 2007.

Daffa', A.A., *The Muslim Contribution to Mathematics*, Croom Helm, 1977.

D'Errico F. et al, Early evidence of San material culture represented by organic artifacts from Border Cave, South Africa, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 2012, **109**(33): 13214-13219.

Eastwood B.S., *Dictionary of Scientific Biography*, New York 1970-1990.

Everett D., *Don't Sleep, There Are Snakes: Life and Language in the Amazonian Jungle*, Vintage Departures, 2009.

Gandz S., *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik: Abteilung B*, Studien, 1930.

Gangooly P., *Sûrya-Siddhânta: A Text-book of Hindu Astronomy,* Motilal Banarsidass Publ., 1989.

Gerbert, *Isagoge Geometriae*, Manuscript on Vellum, Collection of Schoenberg, ms. no. ljs194.

Gorroochurn P., Thirteen correct solutions to the ‘‘Problem of Points’’ and their histories, *The Mathematical Intelligencer*, 2014, **36**, 56-64.

Grant E*., God and Reason in the Middle Ages*, Cambridge University Press, 2010.

Graves D., *Scientists of Faith: Forty-Eight Biographies of Historic Scientists and their Christian Faith*, Kregel Publications,1996.

Green J., Kushim the Sumerian and the first Accounting Mistake in History, https://www.historicmysteries.com/archaeology/kushim-accounting-mistake/28873/ , 2022.

Gordon P., Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia, *Science*, 2004, **306**, 496-499.

Hall A.R., *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz*, Cambridge University Press, 1980.

Hald A., *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*, Wiley, New Jersey, 1990.

Howard Whitley E., *An Introduction to the History of Mathematics,* Philadelphia: Saunders, (1990).

Huff T.E., *The Rise of Early Modern Science: Islam, China and the West*, Cambridge University Press, 2003.

Ifrah G., *From one to zero. A universal history of numbers* transl. by Lowell Bair. New York: Viking Penguin Inc. XVI, 1985.

Ivanova N.M., *A Chronicle of Mathematical Milestones: The Mathematical Calendar*, Cambridge Scholars Publishing, 2023.

Katz V., *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley; Subsequent edition, 1998.

Kienast H J., *The Aqueduct of Eupalinos on Samos*. Athens: Ministry of Culture Archaeological Receipts Fund, 2005.

Landon C.R*., American Indian Mathematics Traditions and Contributions*, Portland Public Schools American Indian Baseline Essays, 1993.

Lewis C.S., *The Discarded Image: An Introduction to Medieval and Renaissance Literature (Canto Classics),* Reprint Edition, Cambridge University Press, 2012.

Lindberg D., *The Beginnings of Western Science. The European Scientific Tradition in Philosophical, Religious, and Institutional Context, Prehistory to A.D. 1450*, Chicago University Press, 2008.

Manders K., Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes, *Historia Mathematica,* 2006, **33**(2), 184-209.

Mansfield D.F., Wildberger N.J., Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry, *Historia Mathematica,* 2017, **44(**4), 395-419.

Mikami Y., *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913.

Morgan J., *Life and Adventure of William Buckley*, Hobart, Tasmania, 1952.

Mozans H. J., *Woman in Science*, MIT Press, 1974.

Needham J., *Science and Civilization in China: Volume 3*, *in Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Caves Books Ltd, 1986.

Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publication, 1969.

Neugebauer O., *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 3 vols., Springer, 1975.

O'Connor J.J., Robertson E.F., Etymology of some common mathematical terms, *MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews.*

Olmstead A.T., Babylonian Astronomy: Historical Sketch, *The American Journal of Semitic Languages and Literatures*, 1938, **55**(2), 113–129.

Ossendrijver M., Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph, *Science*, 2016, **351**(6272), 482–484.

Pannekoek A., *A History of Astronomy*, Dover Publications, 2011.

Parr R., Geometry of Native American Art,

https://www.nku.edu/~longa/classes/mat305/resources/www.math.tamu.edu/~dallen/masters/american/parr.pdf

Pickover C.A., *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics*, Union Square & Co. Milestones, 2012.

Plofker K., *Mathematics in India,* Princeton University Press, 2009.

Proclus Diadochus, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, B.G. Teubner, 1873.

Rauff J.V., Native American Dice Games and Discrete Probability, *Journal of Mathematics and Culture*, 2009, **4**(1), 50-62.

Rajagopal C.T., Rangachari M.S., On Medieval Kerala Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 1986, **35**, 91–99.

Rossi C., *Architecture and mathematics in Ancient Egypt,* Cambridge UP, 2004.

Roshed R., *The Development of Arabic Mathematics: between Arithmetic and Algebra*, Springer, 1994.

Rutman P., *How Mathematics Happened: The First 50,000 Years*, Prometheus, 2007.

Sayili A., *Abdülhamit İbn Türk'ün Katışık Denklemlerde Mantıki Zaruretler Adlı Yazısı ve Zamanın Cebri. (Logical necessities in mixed equations by ʿAbd al Hamīd ibn Turk and the algebra of his time.)*, Türk Tarih Kurumu Basımevı, 1962. Rev. by Jean Itard in *Revue Hist. Sci. Applic*., 1965, I8:123-124.

Sarton G., *The Study of the History of Mathematics*, Cambridge, 1936.

Schmandt-Besserat D., *Before Writing,* Vol.1. *From Counting to Cuneform*; Vol.2. *A Catalogue of Near Eastern Tokens*, Austin: University of Texas Press, 1992.

Seidenberg A., The origin of mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, 1978, **18**(4), 301–342.

Sigler L., *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer, 2003.

Singh S., *The Black Chamber*, https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/kamasutra.html .

Shastri A.M., *India as Seen in the Bṛhatsaṁhitā of Varāhamihira*. Motilal Banarsidass, 1969.

Shank M.H., The Scientific Enterprise in Antiquity and the Middle Ages, Chicago University Press, 2000.

Smith D.E. and Mikami Y., *A History of Japanese Mathematics,* Chicago: Open Court Publishing, 1914.

Sonar T., *The History of the Priority Dispute between Newton and Leibniz: Mathematics in History and Culture*, Springer Nature, 2018.

Stearns P. N., *The Encyclopedia of World History: Ancient, Medieval, and Modern, Chronologically Arranged*, Houghton Mifflin Harcourt, 2001.

Struik D., *A Concise History of Mathematics: Fourth Revised Edition*, Dover Books on Mathematics, 1987.

The Kama Sutra of Vatsyayana (Translated From The Sanscrit In Seven Parts With Preface, Introduction and Concluding Remarks). Translated by Burton, Richard; Indrajit, Bhagavanlal; Bhide, Shivaram Parashuram. The Project Gutenberg. January 18, 2009. Retrieved 3 December 2015.

Thureau-Dangin F., Esquisse d'une histoire du système sexagésimal, Paris, 1932.

van der Waerden H., *Science Awakening*, Springer; 1974.

Van Brumellen G., Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy, *Historia Mathematica*, 2024, **66**, 1-13.

Wilson R.J., *Stamping through Mathematics*, Springer, 2001.

Μπλίκα Μ.Θ., Γυναίκες Μαθηματικοί της Κλασικής Αρχαιότητας, Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2021.

Σπανδάγος Ε., Σπανδάγου Ρ., Τραυλού Δ., *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας*, ΑΙΘΡΑ, 2000.

Σπανδάγος Ε., *Οι Φυσικοί Επιστήμονες της Αρχαίας Ελλάδος*, ΑΙΘΡΑ, 2009.

Вайман А.А., *Шумеро-вавилонская математика III-I тысячелетий до н.э*., под ред. Струве В.В., Москва, Издательство восточной литературы, 1961.

Рифтин А.П., *Старовавилонские документы в собраниях СССР*, М.-Л., 1937.

Юшкевич А.П., *История математики*. **1.** *С древнейших времен до начала Нового времени*, М. Наука, 1970; **2.** *Математика XVII столетия*, М. Наука, 1970; **3.** *Математика XVIII столетия,* Москва, Наука, 1972.

Наукове видання

Історія математики в культурній спадщині Європи

Том I: Давній світ, математика корінних народів Америки

Наталія Іванова

https://www.imath.kiev.ua/~ivanova/

Київ, Інститут математики НАН України

01024 Київ 4, вул. Терещенківська, 3